«بنام او»

Subject: جلسه‌ی اول
Date: شنبه ۹۵/۶/۲۰

معادلات دیفرانسیل (معمولی)   ۱- بویس ← انتشارات نشر دانشگاهی   ۲- سیمونز ← نشر دانشگاهی

تعریف: هر معادله‌ای مشتمل بر متغیر وابسته (تابع) و مشتقات آن نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله‌ی دیفرانسیل گوییم.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad y = \varphi(x)$$

$$\rightarrow F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

مثال: نشان دهید $x^2+y^2=1$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $yy'+x=0$ است.
$\rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$x^2+y^2=1 \rightarrow 2x+2yy'=0 \rightarrow 2(x+yy')=0$$

$\rightarrow x+yy'=0$ صدق می‌کند.

تعریف: هر تابعی مانند $y=\varphi(x)$ اگر در معادله‌ی دیفرانسیلی صدق کند به آن جواب معادله‌ی دیفرانسیل گوییم.

مثال: نشان دهید که $y=3\cos 2x$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y''+4y=0$ است.

$$y=3\cos 2x \rightarrow y'=-6\sin 2x \rightarrow y''=-12\cos 2x$$

$$\rightarrow y''+4y = -12\cos 2x + 12\cos 2x = 0$$

تعریف: بالاترین مشتق موجود در هر معادله‌ی دیفرانسیلی را مرتبه‌ی آن معادله گوییم.

$\rightarrow y^{(4)}+9y=\sin 4x$ مرتبه‌ی ۴

معادله‌ی لژاندر ← مرتبه‌ی ۲ $\quad (1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \rightarrow$ α عدد ثابت

PAPCO

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

۱. معادلات مرتبه اوّل : $F(x,y,y')=0$

یا $y'=f(x,y)$

مرتبه ۲ : $y''=f(x,y,y')$

⋮

مرتبه n : $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$

هر دسته منحنی $\varphi(x,y,c)=0$ که در آن c عدد ثابتی است اگر در معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اوّلی صدق کند به آن جواب عمومی معادله دیفرانسیل گوییم.

مثال: نشان دهید $y=ce^{x}$ جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $y-y'=0$ است.

$\rightarrow y=ce^{x} \rightarrow y'=ce^{x}$

$\rightarrow y-y'=ce^{x}-ce^{x}=0$

تعریف: جواب خصوصی هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اوّل جوابی است که به ازای c های معینی از جواب عمومی آن به دست آید و این زمانی رخ می‌دهد که در شرط اوّلیه‌ی زیر صدق کند: $y(x=x_0)=y_0$

x_0 و y_0 معلوم باشند.

مثال: جواب خصوصی مثال قبل را بیابید اگر $y_{(0)}=1$ باشد. $y=ce^{x}$

$\rightarrow x=0$

$x=0 \rightarrow 1=ce^{0} \rightarrow c=1 \Rightarrow y=e^{x}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

→ به طور کلی جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n اُم دسته منحنی $\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$

است که در آن معادله ی دیفرانسیل صدق کند. ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابت هستند)

→ جواب خصوصی هر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n اُم از روی جواب عمومی آن به دست می آید که در شرایط اولیه ی زیر

صدق کند.

$$y_{(x_0)} = \alpha_1$$

$$y'_{(x_0)} = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}_{(x_0)} = \alpha_n$$

مثال: نشان دهید $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل $y'' + y = 0$

است سپس جواب خصوصی آن را در صورتی که $y_{(\frac{\pi}{2})} = 1$ و $y'_{(\frac{\pi}{2})} = 0$ باشد به دست آورید.

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x \rightarrow y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

$$\rightarrow y'' + y = -c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow c_1 \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + c_2 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = 1 \rightarrow c_2 = 1$$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow -c_1 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} + c_2 \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

→ معادله ای که نسبت به متغیر وابسته و مشتقاتش خطی باشد به آن معادله دیفرانسیل خطی گوییم.

PAPCO

(1) $f_0(x)y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = g(x)$

هرگاه $f_0(x) \neq 0$ ، معادله‌ی فوق را معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n اُم غیر همگن گوییم.

اگر در (1) ، $g(x)=0$ باشد معادله‌ی $f_0(x)y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = 0$ را خطی مرتبه‌ی n اُم همگن گوییم.

غیر خطی مرتبه‌ی اول ← $yy' + x = 0$

" " " $y' + \sin y = 0$

خطی مرتبه‌ی ۲ غیر همگن ← $xy'' + y'\sin x = 5$

خطی مرتبه‌ی ۲ همگن ← $xy'' + y'\sin x = -y \rightarrow xy'' + y'\sin x + y = 0$

تعریف: اگر $y = g(x)$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اولی باشد که از روی جواب عمومی آن به دست نیاید باشد، آن جواب ویژه یا غیر عادی گوییم.

$(x-c)^2 + y^2 = 1$

طریقه‌ی به دست آوردن جواب ویژه: از دسته منحنی یک پارامتری (یک تابع دلخواه) یک بار نسبت به پارامتر مشتق می‌گیریم و سپس از دستگاه معادله به دست آمده دسته منحنی مفروض پارامتر را در صورت امکان حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} -2(x-c) + 0 = 0 \\ (x-c)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

$(x-c) \rightarrow 0$

Scanned by CamScanner

Subject جلسه‌ی دوم «به نام او» شنبه ۲۷/۶/۹۵
Date

معادلات مرتبه‌ی اول:

$y' = f(x,y)$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{-M(x,y)}{N(x,y)}} \rightarrow f(x,y)$$

$\longrightarrow$ فرم دیفرانسیلی $\longrightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

روش تفکیک پذیر یا جدایی پذیر

$$\rightarrow \int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = \int 0$$

جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید = از معادله‌ی زیر انتگرال بگیرید = معادله‌ی زیر را حل کنید.

مثال:

$$y' - y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1} \xrightarrow[\div y \neq 0]{\times dx} \frac{dy}{y} = dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \rightarrow \ln y = x + c_1 \rightarrow y = e^{(x+c_1)}$$

$$\rightarrow e^{x} \cdot e^{c_1} \;(e^{c_1} = c) \rightarrow ce^{x}$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$dx + xy\,dy = y^2 dx + y\,dy$$

$$xy\,dy - y\,dy = y^2 dx - dx \rightarrow y(x-1)\,dy = (y^2-1)\,dx$$

$$\xrightarrow{\div (y^2-1)(x-1) \neq 0} \int \frac{y}{y^2-1}\,dy = \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \ln(x-1) + \ln c_1\right) \times 2$$

$$\rightarrow \ln(y^2-1) = 2\ln(x-1) + 2\ln c_1 \rightarrow \ln c_1^2 (x-1)^2$$

$$\rightarrow y^2 - 1 = c_1^2 (x-1)^2 \quad (c_1^2 = c)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

اگر معادله‌ی $y' = \sin(x-y)$ تفکیک پذیر نیست ولی می‌توان از تغییر متغیر استفاده کرد.

«به طور کلی هر معادله‌ی $y' = f(ax+by+c)$ که در آن a و b و c اعداد ثابتی هستند با استفاده از تغییر متغیر $ax+by+c=t$ به معادله‌ی جدایی پذیر تبدیل می‌شود.»

روش حل معادله‌ی همگن:

تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه‌ی n ام گوییم اگر برای هر λ حقیقی داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثال: آیا تابع زیر همگن است؟

$$f(x,y) = x(\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln y) + ye^{\frac{x}{y}}$$

$$\lambda>0 \rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\Big(\underbrace{\ln\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}}_{\ln\lambda\sqrt{x^2+y^2}} - \ln\lambda y\Big) + \lambda y e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}$$

$$\rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\left(\ln\sqrt{x^2+y^2} + \cancel{\ln\lambda} - \cancel{\ln\lambda} - \ln y\right) + \lambda y e^{\frac{x}{y}}$$

$$= \lambda\Big[\underbrace{x(\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln y) + ye^{\frac{x}{y}}}_{f(x,y)}\Big] = \lambda f(x,y)$$

همگن

$f(x,y) = x^3 + x^2y + 2xy^2 + 1$ همگن نیست اگر 1 نبود همگن بود.

Scanned by CamScanner

تعریف: معادله‌ی دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ را همگن گوییم اگر $f(x,y)$ همگن از درجه‌ی صفر باشد.

* معادله‌ی دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را همگن گوییم اگر توابع M و N همگن هم درجه باشند.

* هر معادله‌ی همگن با استفاده از تغییر متغیر $\frac{y}{x} = u$ یا $y = xu$ به معادله‌ی جدایی پذیر تبدیل می‌شود.

تمرین: نشان دهید که هر معادله‌ی همگن را می‌توان به صورت $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ نوشت.

$$y' = u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \rightarrow x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

$$\div\, x(\varphi(u) - u) \neq 0 \quad \xrightarrow{x\,dx} \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

مثال:

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \xrightarrow[\text{عاملی از } \frac{y}{x} \text{ نوشت}]{\text{می‌توان به صورت}} y' = \frac{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}{x\left(1+\frac{y}{x}\right)}$$

معادله‌ی فوق همگن از درجه‌ی صفر بود بنابراین برای حل آن قرار می‌دهیم:

$$y = xu \quad \text{یا} \quad \frac{y}{x} = u$$

$$y' = u + x\frac{du}{dx} = \frac{x - xu}{x + xu} = \frac{\cancel{x}(1-u)}{\cancel{x}(1+u)}$$

$$\rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} - u$$

Scanned by CamScanner

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \rightarrow \int \frac{(1+u)\,du}{u^2-2u-1} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\ln(u^2-2u-1) = -\ln x + \ln c\right)\times 2$$

$$\rightarrow \ln(u^2-2u-1) = \underbrace{-2\ln x + 2\ln c}_{\ln\frac{c^2}{x^2}}$$

$$\rightarrow c^2 = A \rightarrow u^2-2u-1 = \frac{A}{x^2}$$

$$\rightarrow \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} - 1 = \frac{A}{x^2} \rightarrow y^2+2xy-x^2 = A$$

به نظرم اشتباه محاسباتی داره

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(x^2+3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

← معادله‌ی داده شده همگن می‌باشد برای حل آن قرار می‌دهیم:

$$\frac{y}{x} = u \rightarrow y = xu$$

$$dy = u\,dx + x\,du$$

$2u^2du + 2uxdu$

$$\xrightarrow{\div x^2} ((x^2+3x^2u^2)\,dx - 2x^2u\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(1+3u^2-2u^2)}_{1+u^2}\,dx - 2xu\,du = 0 \rightarrow \int\frac{dx}{x} - \int\frac{2u\,du}{1+u^2} = 0$$

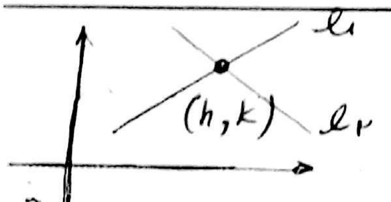
برای حل معادله‌ی روبه‌رو دو حالت را باید بررسی کنیم:

$$y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

الف)

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )



الف) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ یعنی دو خط متقاطع هستند

برای حل قرار میدهیم $x = X + h$ و $y = Y + k$ که در آن (h,k) محل برخورد دو خط خواهد شد.

$$y' = \frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y + (a_1h + b_1k + c_1)}{a_2X + b_2Y + (a_2h + b_2k + c_2)}$$

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \Rightarrow \text{همگن}$$

معادله فوق به معادله جدای پذیر تبدیل میشود اگر قرار دهیم $\frac{Y}{X} = u$

سپس از حل معادله بدست آمده باید در آخر به جای u مقدار $\frac{Y}{X}$ و به جای Y و X به ترتیب $y-k$ و $x-h$ را قرار دهیم

ب) $\Delta = 0$ یعنی دو خط موازیند $\quad a_2 = a_1\lambda$ ، $b_2 = b_1\lambda$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1\lambda x + b_1\lambda y + c_2} = \frac{(a_1x + b_1y) + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2} \qquad (2)$$

با قرار دادن $a_1x + b_1y = t$ معادله (۲) به معادله جدای پذیر تبدیل میشود.

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

Subject: Year. Month. Date. جلسه ۳ «به نام او» دوشنبه ۹۵/۶/۲۹

مثال: معادله $y' = \frac{x-y+5}{x+y-1}$ را حل کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$$ دو خط متقاطع

$x = X + h \quad , \quad y = Y + k$

$$y' = \frac{dY}{dX} = \frac{X - Y + (h - k + 5)}{X + Y + (h + k - 1)}$$

$$\begin{cases} h - k + 5 = 0 \\ h + k - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} h = -2 \\ k = 3 \end{matrix}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$$ همگن $$\rightarrow \frac{Y}{X} = u \rightarrow Y = uX$$

$$\frac{dY}{dX} = u + X\frac{du}{dX} = \frac{X - Xu}{X + Xu} = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\rightarrow X\frac{du}{dX} = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1 - 2u - u^2}{1+u}$$

$$\int \frac{1+u}{u^2 + 2u - 1} = -\int \frac{dX}{X} \rightarrow \ln(u^2 + 2u - 1) = -2\ln X + \ln c$$

$$\rightarrow u^2 + 2u - 1 = \frac{c}{X^2}$$

$$\rightarrow \frac{Y^2}{X^2} + \frac{2Y}{X} - 1 = \frac{c}{X^2} \rightarrow Y^2 + 2XY - X^2 = c$$

$$\rightarrow (y-3)^2 + 2(x+2)(y-3) - (x+2)^2 = c$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال: معادله‌ی $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$ را حل کنید. ($1-x-y = 1-(x+y)$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \text{دو خط موازی}$$

$$\to x+y=t \to 1+y' = \frac{dt}{dx} \to y' = \frac{dt}{dx} - 1$$

$$\to \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1-t}{t}$$

$$\to \frac{dt}{dx} = \frac{1-t}{t} + 1 = \frac{1}{t}$$

$$\to \int t\,dt = \int dx \to \frac{1}{2}t^2 = x + C$$

$$\to \frac{1}{2}(x+y)^2 = x + C$$

مثال: با استفاده از تغییر متغیر $y = z^\alpha$ معادله‌ی زیر را به معادله‌ی همگن تبدیل کرده و سپس حل کنید.

$$\to (y^4 - 3x^2)\,dy + xy\,dx = 0$$

$$y = z^\alpha \to dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$$

$$\to (z^{4\alpha} - 3x^2)(\alpha z^{\alpha-1}\,dz) + x z^\alpha\,dx = 0$$

$$\to \underbrace{\alpha(\underbrace{z^{5\alpha-1}}_{5\alpha-1} - \underbrace{3x^2 z^{\alpha-1}}_{\alpha+1})}_{M(x,y)}\,dz + \underbrace{\underbrace{x z^\alpha}_{\alpha+1}\,dx}_{N(x,y)} = 0$$

که برای اینکه این معادله همگن شود باید درجه $M(x,y)$ با $N(x,y)$ برابر می‌شود.

$$\to 5\alpha - 1 = \alpha + 1 \to \alpha = \frac{1}{2}$$

Scanned by CamScanner

$$\left(\frac{1}{2} \left(\underbrace{z^{\frac{5}{2}-1}}_{z^{\frac{3}{2}}} - 3x^2 z^{-\frac{1}{2}} \right) dz + x z^{\frac{1}{2}} dx = 0 \right) 2 x z^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow (z^2 - 3x^2)\, dz + 2xz\, dx = 0 \qquad \text{همگن}$$

$$\rightarrow \frac{y}{x} = u \quad \cdots$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

① $(x+y-1)^2 dy - 2(y+2)\, dx = 0$

② $y' - \tan \dfrac{y-2x}{x+1} = \dfrac{y+2}{x+1}$

③ $y\left(1+\sqrt{x^2y^4+1}\right) dx + 2x\, dy$

$y' = (x+2y+5)^2$ یا $y' = \sin(x+y)$

← معادله دیفرانسیل $y' = f(ax+by+c)$ که در آن a، b، و c اعداد ثابتی هستند با استفاده از

تغییر متغیر $t = ax+by+c$ به معادله جدایی پذیر تبدیل می‌شود.

مثال: $(\sin x + y)\, dx + (x - 2y)\, dy = 0$

$$\rightarrow \sin x\, dx + (y\, dx + x\, dy) - 2y\, dy = 0$$

← انتگرال از طرفین $\int \sin x\, dx + \int y\, dx + x\, dy - \int 2y\, dy$

Scanned by CamScanner

$\rightarrow -\cos x + xy - y^2 = C$

مثال: مطلوب است دیفرانسیل $y\cos x + xy + y^2 = 5$

$\rightarrow (\cos x)\,dy + y(-\sin x)\,dx + y\,dx + x\,dy + 2y\,dy = 0$

$\rightarrow (-y\sin x + y)\,dx + (\cos x + x + 2y)\,dy = 0$

★ اگر در معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ داشته باشیم $M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ، $N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ یعنی تابعی مانند $f(x,y)$ در معادله فوق صدق کند

می‌گوییم چنین معادله‌ای را معادله دیفرانسیل کامل گوییم.

★ شرط لازم و کافی برای اینکه معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ کامل باشد این است که

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ، می‌دانیم توابع M و N در ناحیه‌ای مانند D پیوسته هستند.

شرط لازم: معادله کامل است.

$$M\,dx + N\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = N \end{cases} \qquad (1)$$

از طرفین اولین تساوی (۱) نسبت به y و دومین تساوی (۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

می‌دانیم $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ پس نتیجه می‌گیریم $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

شرط کافی: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ باید تابعی باشد، $f(x,y)$ را چنان بیابیم که داشته باشیم:

$$df = Mdx + Ndy$$

چنین تابعی که باید در (۱) صدق کند.

به فرض $(x_0, y_0) \in D$ طرفین اولین تساوی (۱) را در dx ضرب کرده و سپس از طرفین تساوی بدست آمده از x_0 تا x انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int_{x_0}^{x} M dx$$

$$\rightarrow f(x,y)\Big]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} M dx$$

$$\rightarrow f(x,y) - \underbrace{f(x_0, y)}_{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x} M dx$$

Scanned by CamScanner

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M\,dx + \varphi(y) \qquad (۲)$$

ـــه از طرفین (۲) نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(y))$$

$$\rightarrow N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\rightarrow N(x,y) = N(x,y)\Big]_{x_0}^{x} + \varphi'(y)$$

$$\rightarrow N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y)$$

$$\rightarrow \varphi'(y) = N(x_0,y)$$

$$\rightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy \qquad (۳)$$

ـــه با قرار دادن (۳) در (۲) این مسئله فیصله نتیجه می‌شود.

$$dF = 0 \rightarrow F(x,y) = C$$

$$dF = M\,dx + N\,dy = 0$$

اگر معادله کامل باشد برای حل کردن از یکی از مراحل های زیر استفاده می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

$\rightarrow \quad F = \int M\,dx + \overset{?}{\varphi(y)}$ یا $F = \int N\,dy + \overset{?}{\varphi(x)}$

مثال: $\overbrace{(\underbrace{-y\sin x + y}_{M})\,dx + (\underbrace{\cos x + x + 2y}_{N})\,dy}^{dF} = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin x + 1$$

$\Rightarrow$ معادله کامل است

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin x + 1$$

$$F = \int M\,dx + \varphi(y)$$

$$F = \int (-y\sin x + y)\,dx + \varphi(y)$$

$$F = y\cos x + xy + \varphi(y)$$

$$N \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{\cos x} + \cancel{x} + \varphi'(y)$$

$$\hookrightarrow \cancel{\cos x} + \cancel{x} + 2y$$

$$\rightarrow \varphi'(y) = 2y \rightarrow \varphi(y) = y^2 + C_1$$

$$F = y\cos x + xy + y^2 + C_1$$

$$dF = 0 \rightarrow F = C_2$$

$$\rightarrow y\cos x + xy + y^2 = C$$

$$C = C_2 - C_1$$

Scanned by CamScanner

Subject جلسه ۴
Date

«بسم الله» سه‌شنبه ۹۵/۷/۱۳

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$df = \underbrace{(e^{2y} - y\cos xy)}_{M}dx + \underbrace{(2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos xy + xy\sin xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y} - \cos xy + xy\sin xy$$

→ معادله کامل

$$F = \int N\,dy + \overset{?}{\varphi(x)} \rightarrow F = \int (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)\,dy + \overset{?}{\varphi(x)}$$

$$\rightarrow F = xe^{2y} - \sin xy + y^2 + \overset{?}{\varphi(x)}$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} = e^{2y} - y\cos xy + \varphi'(x)$$

$$\rightarrow M = e^{2y} - y\cos xy = e^{2y} - y\cos xy + \varphi'(x)$$

$$\rightarrow \varphi'(x) = 0 \rightarrow \varphi(x) = c_1$$

$$F = xe^{2y} - \sin xy + c_1 + y^2$$

$$dF = 0 \rightarrow F = c_2$$

$$\rightarrow c_2 = xe^{2y} - \sin xy + y^2 + c_1 \rightarrow c_2 - c_1 = xe^{2y} - \sin xy + y^2$$

→ جواب عام: $xe^{2y} - \sin xy + y^2 = c$

Subject
Date

$$d\left(\tan^{-1}\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}$$

← اگر جملات مشابه را کنار هم قرار دهیم می‌توانیم از آن‌ها دیفرانسیل کامل بسازیم. با انتگرال گیری از طرفین مسئله را به سادگی حل می‌کنیم.

مثال حل ← $\underbrace{(e^{2y}dx + 2xe^{2y}dy)}_{d(xe^{2y})} - \underbrace{(y\cos xy\,dx + x\cos xy\,dy)}_{d(\sin xy)} + \underbrace{(2y\,dy)}_{d(y^2)}$

← انتگرال از طرفین ← $xe^{2y} - \sin xy + y^2 = c$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y \leftarrow (x^2+y^2-1)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

* تعریف: اگر معادله‌ی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد ولی تابعی مانند $\varphi(x,y)$ در آن ضرب شود به معادله‌ی کامل تبدیل گردد در این صورت $\varphi(x,y)$ را عامل انتگرال‌ساز یا فاکتور انتگرال گوییم.

$\rightarrow \varphi M\,dx + \varphi N\,dy = 0 \rightarrow$ کامل است

شرط کامل بودن: $\dfrac{\partial(\varphi M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\varphi N)}{\partial x}$

$$\rightarrow M\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\div\varphi \quad \left(\varphi\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \varphi}{\partial x} - M\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

$$(*) \rightarrow \frac{1}{\varphi}\left(N\frac{\partial \varphi}{\partial x} - M\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

برای به دست آوردن φ از $(*)$ چند حالت خاص زیر را بررسی می‌کنیم.

الف) φ فقط تابعی برحسب x است. در این حالت $(*)$ به صورت زیر در می‌آید.

$$\rightarrow \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}}_{\text{باید تابعی برحسب } x \text{ باشد}} = g(x)$$

$$\rightarrow \varphi = e^{\int g(x)\,dx}$$

ب) φ فقط تابعی برحسب y است. در این حالت $(*)$ به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}}_{\text{باید تابعی برحسب } y \text{ باشد}} = h(y)$$

$$\rightarrow \varphi = e^{\int h(y)\,dy}$$

مثال: فاکتور انتگرال برای معادله‌ی زیر بیابید.

$$\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{M}dx - \underbrace{2xy}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-(-2y)}{-2xy} = \frac{4y}{-2xy} = \frac{-2}{x}$$

$$\varphi = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

Scanned by CamScanner

$$\left((x^2+y^2-1)\,dx - 2xy\,dy = 0\right) \times \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1+\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}_{M} dx - \underbrace{\frac{2y}{x}}_{N}\, dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ج : φ تابعی بر حسب y^2-x^2 است. $\varphi(x,y) = \varphi(y^2-x^2)$.

به فرض $z = y^2-x^2$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -2x\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad \frac{d\varphi}{dz}$$

معادله‌ی به دست آمده فوق را در (*) قرار می‌دهیم :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-2xN-2yM} = F(z)$$

باید تابعی بر حسب z باشد.

$$\varphi = e^{\int F(z)\,dz}$$

مثال : فاکتور انتگرال برای معادله‌ی زیر بیابید.

$$(x^2+y^2-1)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-2xN-2yM} = \frac{4y}{-2x(-2xy)-2y(x^2+y^2-1)} = \frac{4y}{2x^2y-2y^3+2y}$$

$$= \frac{-4y}{4y(y^2-x^2-1)} = \frac{-2}{\underbrace{y^2-x^2-1}_{z}} \rightarrow \varphi = e^{\int \frac{-2}{z-1}dz} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(y^2-x^2-1)^2}$$

← نتیجه : فاکتور انتگرال یک معادله منحصر به فرد نیست ←

$$ydx - xdy = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{ydx}{x^2} - \frac{xdy}{x^2} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{ydx - xdy}{x^2}}_{d(-\frac{y}{x})} = 0$$

$$\rightarrow \int d(-\frac{y}{x}) = \int dc \rightarrow \frac{-y}{x} = c$$

$$\frac{y}{y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{ydx - xdy}{y^2}}_{d(\frac{x}{y})} = 0$$

$$\rightarrow \int d(\frac{x}{y}) = \int dc \rightarrow \frac{x}{y} = c$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0$$

$$\rightarrow \int d(\ln x) - \int d(\ln y) = \int d(\ln c)$$

$$\rightarrow \frac{x}{y} = c$$

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

معادله‌ی $y(kx^a y^b + lx^c y^d)\,dx + x(mx^a y^b + nx^c y^d)\,dy = 0$

دارای فاکتور انتگرال $x^\alpha y^\beta$ است مشروط بر اینکه $(kn - lm) \neq 0$ می‌دانیم $a, b, c, d, k,$ l و m و n اعداد ثابتی هستند.

مثال: α و β را چنان تعیین کنید $x^\alpha y^\beta$ فاکتور انتگرال معادله‌ی زیر باشد.

$$x^\alpha y^\beta \left((-xy\sin x + 2y\cos x)\,dx + (2x\cos x)\,dy = 0 \right)$$

$$\underbrace{(-x^{\alpha+1} y^{\beta+1} \sin x + 2x^\alpha y^{\beta+1} \cos x)}_{M}\,dx$$

$$+ \underbrace{2x^{\alpha+1} y^\beta \cos x}_{N}\,dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -(\beta+1) y^\beta x^{\alpha+1} \sin x + 2(\beta+1) y^\beta x^\alpha \cos x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2(\alpha+1) x^\alpha y^\beta \cos x - 2x^{\alpha+1} y^\beta \sin x$$

$$2(\alpha+1) = 2(\beta+1) \Longrightarrow \alpha = 1$$

$$-(\beta+1) = -2 \Longrightarrow \beta = 1$$

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

«به نام او»

دوشنبه ۹۵/۷/۵

معادله‌ی خطی مرتبه اول:

$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\, y = g(x)$ معادله‌ی خطی مرتبه‌ی n اُم غیر همگن استاندارد.

اگر چنین ضریب $y^{(n)}$ یک است یعنی $f_0(x)=1$ پس استاندارد گوییم.

اگر $g(x)=0$ معادله‌ی فوق را همگن گوییم.

خطی مرتبه اول $\quad y' + f(x)y = g(x) \quad (1)$

← برای حل معادله‌ی (1) دو روش زیر را بررسی می‌کنیم.

(1) به روش فاکتور انتگرال

$$(2)\quad \underbrace{dy}_{N} + \underbrace{(f(x)y - g(x))}_{M}\,dx = 0$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{f(x) - 0}{1} = f(x)$$

$\varphi = e^{\int f(x)dx} \quad (3)$ فاکتور انتگرال.

← طرفین (2) را در (3) ضرب می‌کنیم.

$$\rightarrow \underbrace{e^{\int f(x)dx}\,dy + f(x)\,y\,e^{\int f(x)dx}}_{d\left(y e^{\int f(x)dx}\right)} = g(x)\,e^{\int f(x)dx}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$\to \int d\left(y e^{\int f(x)dx}\right) = \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx$$

$$y e^{\int f(x)dx} = c + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx$$

$$\to y = e^{-\int f(x)dx} \left[c + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \right]$$

$$\to y = \underbrace{c e^{-\int f(x)dx}}_{y_h} + \underbrace{e^{-\int f(x)dx} \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx}_{y_p}$$

جواب معادله‌ی همگن ← y_h y_p جواب خصوصی

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y' - 2xy = 4xe^{-x^2}$$

← معادله‌ی فوق یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول است که در آن $f(x) = -2x$ و $g(x) = 4xe^{-x^2}$

$$\to y = e^{-\int -2x dx} \left[c + \int 4xe^{-x^2} e^{\int -2x dx} dx \right]$$

$$\to y = e^{x^2} \left(c + \int 4xe^{-2x^2} dx \right)$$

$$\to y = e^{x^2} \left(c - e^{-2x^2} \right) = \underbrace{ce^{x^2}}_{y_h} - \underbrace{e^{-x^2}}_{y_p}$$

۲) روش تغییر پارامتر:

Scanned by CamScanner

Subject
Date

در این روش ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن نظیر (۱) را به دست می‌آوریم :

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (1)$$

یعنی معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم :

$$(2) \qquad y' + f(x)y = 0$$ جدایی‌پذیر

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$\rightarrow \ln y = -\int f(x)dx + \ln c_1$$

$$\rightarrow \ln \frac{y}{c_1} = -\int f(x)dx \rightarrow y = c_1 e^{-\int f(x)dx}$$

به فرض c_1 تابعی بر حسب x باشد و $y = c_1(x) e^{-\int f(x)dx}$ جواب عمومی (۱) باشد . (۳)

$$y' = c_1' e^{-\int f(x)dx} - c_1 f(x) e^{-\int f(x)dx} \qquad (4)$$

← (۳) و (۴) را در (۱) قرار می‌دهیم .

$$c_1' e^{-\int f(x)dx} - c_1 f(x) e^{-\int f(x)dx} + c_1 f(x) e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

$$\rightarrow c_1' = g(x) e^{\int f(x)dx}$$

$$c_1 = c + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \qquad (5)$$

با قرار دادن (۵) در (۳) جواب عمومی (۱) به دست می‌آید .

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[c + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \right]$$

Scanned by CamScanner

Date

تمرین (1-): $u(x)$ و $v(x)$ را چنان بیابید که $y = u(x)v(x)$ جواب عمومی معادله‌ی خطی مرتبه اول $y' + P(x)y = g(x)$ باشد.

مثال: با استفاده از روش تغییر پارامتر معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y' - 2xy = 4xe^{-x^2}$$

$$y' - 2xy = 0 \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\rightarrow \ln y = x^2 + \ln c_1 \rightarrow y = c_1 e^{x^2}$$

با فرض c_1 تابعی بر حسب x باشد $y = c_1(x) e^{x^2}$ * جواب عمومی معادله‌ی داده شده باشد.

$$y' = c_1' e^{x^2} + 2x c_1 e^{x^2}$$

مقادیر فوق را در معادله‌ی داده شده قرار می‌دهیم.

$$\rightarrow c_1' e^{x^2} + 2x c_1 e^{x^2} - 2x c_1 e^{x^2} = 4xe^{-x^2}$$

$$\rightarrow c_1' = 4xe^{-2x^2} \rightarrow c_1 = c - e^{-2x^2}$$

$$* \text{ در معادله } \rightarrow y = (c - e^{-2x^2}) e^{x^2}$$

مثال: با روش تغییر پارامتر معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y' \cos x + y \sin x = 1$$

Scanned by CamScanner

$$(y'\cos x + y\sin x = 1) \div \cos x$$

$$\rightarrow y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$\rightarrow y' + y\tan x = 0 \rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \tan x\, dx$$

$$\rightarrow \ln y = \ln\cos x + \ln c_1 \overset{*}{\rightarrow} y = c_1\cos x$$

به فرض c_1 تابعی بر حسب x باشد و $y = c_1(x)\cos x$ جواب خصوصی معادله‌ی (1) باشد، $y' = c_1'\cos x - c_1\sin x$

مقادیر فوق را در معادله‌ی (1) قرار می‌دهیم.

$$\rightarrow c_1'\cos x - c_1\sin x + (c_1\cos x)\tan x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\rightarrow c_1' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\rightarrow c_1 = c + \tan x$$

جایگذاری در * $\rightarrow y = (c + \tan x)\cos x$

مثال ۱۰: معادله‌ی خطی زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{1}{x + y^2}$$

$$** \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \rightarrow \frac{dx}{dy} = x + y^2$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} - x = y^2$$

$$\rightarrow x' - x = y^2 \rightarrow x' + f(y)x = g(y)$$

Scanned by CamScanner

$\rightarrow f(y) = -1 \quad , \quad g(y) = y^2$

$$\rightarrow x = e^{-\int f(y)dy} \left(c + \int g(y) e^{\int f(y)dy} dy \right)$$

معادله‌ی برنولی :

$$y' + f(x)y = g(x)y^n \qquad n \neq 0,1$$

$$\div y^n \rightarrow y'y^{-n} + f(x)y^{1-n} = g(x)$$

قرار دهیم $t = y^{1-n}$

$$\rightarrow \frac{dt}{dx} = (1-n)y'y^{-n} \rightarrow y'y^{-n} = \frac{1}{1-n}\frac{dt}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dt}{dx} + f(x)t = g(x)$$

$$\rightarrow \frac{dt}{dx} + (1-n)f(x)t = (1-n)g(x)$$ خطی مرتبه اول

مثال : $y' + x\tan y = \sec y \xrightarrow{x\cos y} y'\cos y + x\sin y = 1$

معادله‌ی ریکاتی :

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

معادله‌ی فوق به ازای $h(x)$ و $f(x)$ مخالف صفر هستند.

برای حل معادله‌ی ریکاتی داشتن یک جواب آن لازم است. به فرض y_1 یک جواب آن باشد.

تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u(x)}$ معادله‌ی ریکاتی را به معادله‌ی خطی مرتبه اول تبدیل می‌کند.

Scanned by CamScanner

مثال: معادله را حل کنید.

$$y' = e^{-x}y^2 + y - e^x \qquad y_1 = e^x$$

← معادله‌ی داده شده ریکاتی است پس برای حل آن قرار می‌دهیم:

$$y = e^x + \frac{1}{u(x)}$$

$$y' = e^x - \frac{u'}{u^2} \to e^x - \frac{u'}{u^2} = e^{-x}\left(e^x + \frac{1}{u}\right)^2 + e^x + \frac{1}{u(x)} - e^x$$

$$\to e^x - \frac{u'}{u^2} = e^x + \frac{e^{-x}}{u^2} + \frac{2}{u} + \frac{1}{u} \to u' = -e^{-x} - 3u$$

$$\to u' + 3u = -e^{-x}$$ خطی مرتبه اول

معادلات غیر خطی مرتبه‌ی اول:

$$(y')^n + F_1(x,y)(y')^{n-1} + \dots + F_n(x,y) = 0$$

برای حل معادله‌ی فوق چند حالت خاص زیر را بررسی می‌کنیم:

(1) به فرض معادله‌ی فوق به n عامل درجه اول به صورت زیر تجزیه گردد.

$(y'-a_1)(y'-a_2)\dots(y'-a_n) = 0$ که در آن a_i ها $1 \le i \le n$ توابعی بر حسب x و y و یا c

$\varphi_1(x,y,c)$ ، $\varphi_2(x,y,c)$ ، … ، $\varphi_n(x,y,c)$ ها انتگرال‌ها هستند.

* به تعداد درجه‌ی معادله ثابت انتگرال داریم: درجه ۱ = یک ثابت انتگرال = c

جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$\varphi_1(x,y,c)\cdot\varphi_2(x,y,c)\cdots\varphi_n(x,y,c)$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

* $$y'^2 - (x+y)y' + xy = 0$$

$$\to (y'-x)(y'-y) = 0 \qquad y'-x = 0 \to dy - x\,dx = 0$$

جدایی‌پذیر $$y - \frac{1}{2}x^2 = c \to y - \frac{1}{2}x^2 - c = 0$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

$$\frac{dy}{y} - dx = 0 \rightarrow \ln y - x = c \rightarrow \ln y - x - c = 0$$

جواب عمومی معادله $= (y - \frac{1}{2}x^2 - c)(\ln y - x - c) = 0 \rightarrow$

مثال: معادله‌ی $xy'^2 - 2yy' - x = 0$ را حل کنید:

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + x^2}}{x}$$

معادله همگن است قرار می‌دهیم $u = \frac{y}{x}$ یا $y = xu$

$$y' = u + x\frac{du}{dx} = \frac{xu \pm \sqrt{x^2u^2 + x^2}}{x}$$

$$\rightarrow x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{u^2+1} \rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \pm \int \frac{dx}{x}$$

معادله‌ی لاگرانژ:

(۱) $y = xf(y') + g(y')$ برای حل قرار می‌دهیم $y' = P$

(۲) $y = xf(P) + g(P)$

از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$P = \frac{dy}{dx} = f(P) + xf'(P)\frac{dP}{dx} + g'(P)\frac{dP}{dx}$$

(۳) $\left(P - f(P) = (xf'(P) + g'(P))\frac{dP}{dx}\right) \div (P - f(P)) \neq 0 \quad \times \frac{dx}{dP}$

(۴) $\rightarrow \frac{dx}{dP} = \frac{1}{P - f(P)}(xf'(P) + g'(P))$

Scanned by CamScanner

Date

$$\frac{dx}{dP} - \frac{f'(P)}{P-f(P)} \cdot x = \frac{g'(P)}{P-f(P)}$$

(۴) یک معادله‌ی خطی مرتبه اول می‌باشد که در آن x متغیر تابع و P متغیر مستقل است. به فرض $x=\varphi(P,C)$ جواب آن باشد.

← در نتیجه جواب عمومی (۱) به صورت پارامتری به شکل زیر است اگر بتوانیم P را حذف کنیم از دستگاه زیر یابیم.

$$\begin{cases} x = \varphi(P,C) \\ y = xf(P) + g(P) \end{cases}$$

← اگر $P-f(P)=0$ دارای جواب‌های P_1, P_2 و ... باشد با قرار دادن هر یک از آن‌ها در (۲) جواب‌های دیگر (۱) بدست می‌آید.

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$y = \frac{1}{2}xy' + \ln y'$$

← برای حل قرار می‌دهیم: $y'=P$

$$y = \frac{1}{2}xP + \ln P$$

← مشتق از طرفین نسبت به x

$$P = y' = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}x\frac{dP}{dx} + \frac{1}{P}\frac{dP}{dx}$$

$$\to \left(\frac{1}{2}P = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{P}\right)\frac{dP}{dx}\right) \div P\neq 0 \ , \ \times 2 \ , \ \times \frac{dx}{dP}$$

← خطی مرتبه اول

$$\frac{dx}{dP} - \frac{1}{P}x = \frac{2}{P^2}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$x = e^{-\int -\frac{1}{p}dp}\left(c + \int \frac{2}{p^2}\, e^{\int -\frac{1}{p}dp}\, dp\right)$$

جواب عمومی

$$\begin{cases} x = p\left(c - \dfrac{1}{p^2}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}xp + \ln p \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $y = xy' - y'^2$ را حل کنید.

حل: $y' = p \to y = xp - p^2$

مشتق گرفتن نسبت به x $\to$ $p = \frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$

$$\to \frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0$$

$\frac{dp}{dx} = 0 \to p = c$

جواب عمومی: $y = cx - c^2$

$$\begin{cases} x - 2p = 0 \to p = \dfrac{x}{2} \\ y = xp - p^2 \to y = x\left(\dfrac{x}{2}\right) - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

معادله‌ی کلرو $y = xy' + g(y')$ $\quad f(y') = y'$

جواب عمومی معادله‌ی فوق $y = cx + g(c)$

مثال: $y = y'^3 + y'^5$

← معادله‌ی فوق فاقد x است قرار می‌دهیم $y' = p$

$y = p^3 + p^5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(p^3 + p^5) \rightarrow p = 3p^2\frac{dp}{dx} + 5p^4\frac{dp}{dx}$

← مشتق پذیر

$\xrightarrow[\times dx]{\div p \neq 0} \int dx = \int (3p + 5p^3)\,dp$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}p^2 + \frac{5}{4}p^4 + c \\ y = p^3 + p^5 \end{cases}$$

* اگر صورت سوال بود $x = y'^3 + y'^5$ همان مثل سوال قبل عمل می‌کنیم یعنی $y' = p$ فقط از طرفین نسبت به y مشتق می‌گیریم.

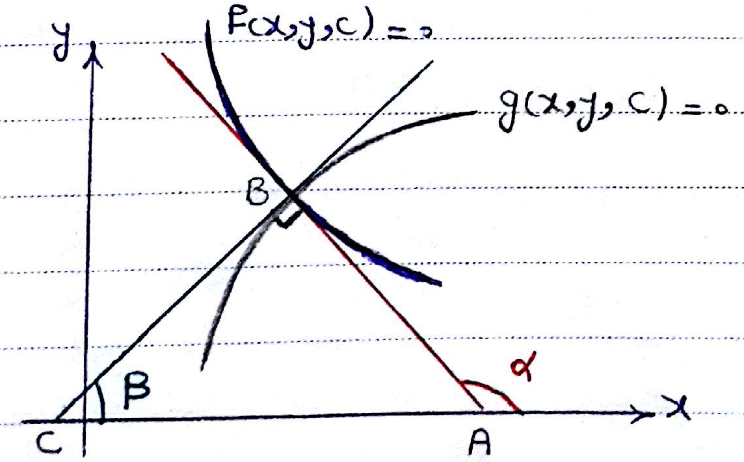
مثال: $y = x^2 + y'^2$

~~$y' = \pm\sqrt{y - x^2}$~~

$y' = p \rightarrow y = x^2 + p^2 \rightarrow p = \frac{dy}{dx} = 2x + 2p\frac{dp}{dx}$

$\rightarrow p - 2x = 2p\frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p - 2x}{2p}$ ← همگن

$\rightarrow p = ux$ ....



$\alpha = 90 + \beta$

$\tan\alpha = \tan(90 + \beta)$
$= -\cot\beta = \frac{-1}{\tan\beta}$

$y' \longrightarrow -\frac{1}{y'}$

Scanned by CamScanner

Date

برای بدست آوردن مسیر قائم بر دسته منحنی مفروض در دستگاه مختصات دکارتی ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی مفروض را باید تشکیل دهیم و سپس به جای y' باید قرار دهیم $-\frac{1}{y'}$ و معادله دیفرانسیل جدید را حل کنیم.

مثال: مسیر قائم دسته منحنی زیر را بیابید.

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی مفروض $\frac{y}{y'} = \frac{x}{2}$

$$y' \to -\frac{1}{y'}$$

معادله دیفرانسیل مسیر قائم $-yy' = \frac{x}{2}$ ← جدایی پذیر

$$\to \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$$

Scanned by CamScanner

$y = r\sin\theta \;,\; x = r\cos\theta \qquad \tan\psi = \dfrac{r}{r'} \;،\; r = f(\theta)$

$$\frac{r}{r'} \longrightarrow -\frac{r'}{r}$$

$$r' \longrightarrow -\frac{r^2}{r'}$$

مثال: مسیرهای قائم دسته منحنی زیر را بیابید.

$$x^2+y^2 = 2cx \longrightarrow c = \frac{x^2+y^2}{2x}$$

روش اول: مشتق نسبت به x

$$2x+2yy' = 2c \longrightarrow 2x+2yy' = \frac{x^2+y^2}{x}$$

$$\longrightarrow 2yy' = \frac{x^2+y^2}{x} - 2x \longrightarrow 2yy' = \frac{y^2-x^2}{x}$$

$$\longrightarrow y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

$$y' \longrightarrow -\frac{1}{y'}$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \longrightarrow$$ معادله‌ی حل ......

روش دوم: قطبی

$$x^2+y^2 = 2cx$$

$$\longrightarrow r^2 = 2rc\cos\theta \longrightarrow r = 2c\cos\theta$$

$r' = -2c\sin\theta$ ، معادله دیفرانسیل دسته منحنی مفروض: $\dfrac{r}{r'} = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\frac{r}{r'} \longrightarrow -\frac{r'}{r}$$

معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم: $-\dfrac{r'}{r} = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

متغیرها جدا شدنی

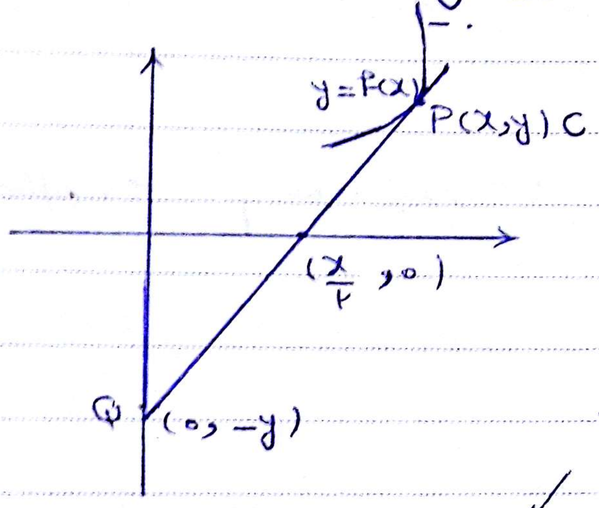
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \rightarrow \ln r = \ln \sin\theta + \ln c \rightarrow r = c\sin\theta$$

مثال: خم‌های C را چنان تعیین کنید که محور x ها پاره خط محدود بین مماس در نقطه P و محور y ها را نصف کند.

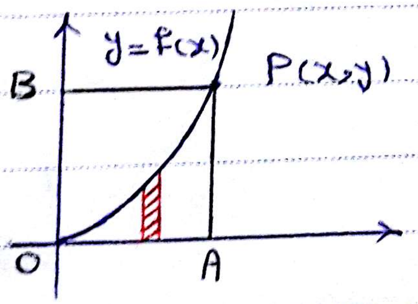


$$\overline{PQ} = y' = \frac{2y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$\rightarrow \ln y = 2\ln x + \ln c \rightarrow y = cx^2$$

مثال: از نقطه P واقع بر منحنی‌های C که همگی از مبدأ مختصات می‌گذرند خطوط PA و PB را به ترتیب موازی محور y ها و x ها رسم می‌کنیم، قوس OP مستطیلی را که از محورهای مختصات و خطوط PA و PB تشکیل می‌شوند به دو قسمت تقسیم می‌کند منحنی‌های C را چنان تعیین کنید که مساحت یکی از قسمت‌ها سه برابر سطح قسمت دیگر باشد.



۳ مساحت OPA = مساحت OPB

$$xy - \int_0^x y\,dx = 3\int_0^x y\,dx$$

$$\rightarrow xy = 4\int_0^x y\,dx$$

$$\rightarrow y + xy' = 4y \rightarrow xy' = 3y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x}$$

$$\rightarrow y = cx^3$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تمرین: $\varphi(x)$ را بیابید اگر:

$$\int_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = n\,\varphi(x)$$

مثال: بنا بر قانون نیوتن، درجه‌ی تبرید یک جسم در هوا با تفاضل دمای جسم یعنی T و دمای هوا یعنی T_0 (تغییر دما نسبت به زمان) متناسب است. اگر دمای هوا $20^\circ C$ باشد و جسم در مدت ۲۰ دقیقه از ۱۰۰ تا ۶۰ درجه سرد شود، در چه مدت دمای آن به ۳۰° تنزل می‌کند.

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0), \quad T_0 \to 20$$

$$\to \int_{100}^{60} \frac{dT}{T-20} = \int_0^{20} K\,dt$$

$$\to \ln(T-20)\Big]_{100}^{60} = Kt\Big]_0^{20} \to \ln 40 - \ln 80 = 20K$$

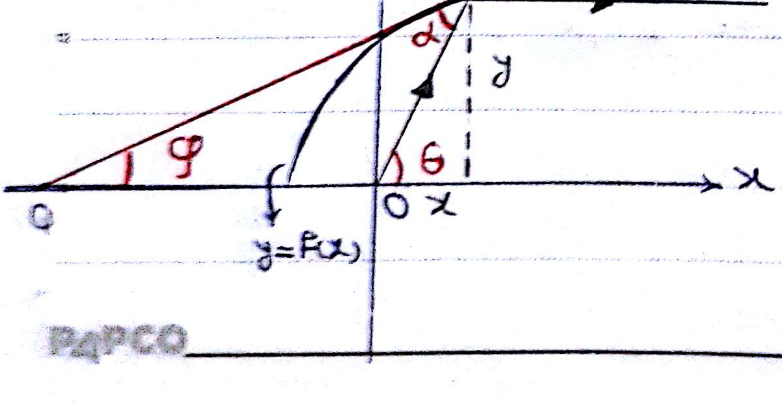
$$\to K = \frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}$$

$$\int_{100}^{30} \frac{dT}{T-20} = \int_0^{t} \left(\frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}\right) dt$$

یا

$$\int_{60}^{30} \frac{dT}{T-20} = \int_{20}^{t} \left(\frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}\right) dt$$

مثال: شکل آینه‌ی مقعری را پیدا کنید که نوری که از منبع واقع در مبدأ مختصات بر آن می‌تابد به صورت ستونی از پرتوها به موازات محور x ها منعکس کند.



PAPCO

Scanned by CamScanner

زاویه‌ی تابش و بازتابش ← ضلع قائم انعکاس ← $\alpha = \beta$

موازی مورد ← $\beta = \varphi$ $\quad \theta = \alpha + \varphi$

$\rightarrow \theta = 2\beta$

$$\tan\theta = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

$\varphi = \beta \rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{2y'}{1-y'^2} \rightarrow y - yy'^2 = 2xy' \rightarrow yy'^2 + 2xy' - y = 0$

$\tan\varphi = y'$

شیب خط مماس

$\rightarrow y' = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y} \rightarrow$ ضرب و حل

حالت مرتبه ۲:

$$y'' = F(x, y, y')$$

برای حل معادله‌ی فوق چند حالت خاص زیر را بررسی می‌کنیم.

الف) فاقد y و y':

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = \varphi(x)$$

$\int dy' = \int \varphi(x)dx \rightarrow y' = \int \varphi(x)\,dx + c_1$

$\rightarrow y = \iint \varphi(x)\,dx.dx + c_1x + c_2$

(دوبار)

PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

$$y^{(n)} = g(x) \qquad y = \underbrace{\iint \cdots \int}_{n\ \text{بار}} g(x) \underbrace{dx.dx \cdots dx}_{n\ \text{بار}} + \frac{1}{(n-1)!} c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

$$y''' = \sin x + 6x \rightarrow y'' = -\cos x + 3x^2 + c_1 \rightarrow y' = -\sin x + x^3 + c_1 x + c_2$$

$$\rightarrow y = \cos x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$$

ب) معادله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم که فاقد متغیر تابع یعنی y است.

$$y'' = G(x, y')$$

برای حل قرار می‌دهیم $y' = P$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dP}{dx} = G(x, P)$$

پس از حل معادله‌ی مرتبه اول فوق و محاسبه‌ی P، در آخر به جای P مقدارش y' را قرار می‌دهیم و یک معادله دیفرانسیل جدایی‌پذیر حل می‌کنیم.

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0$$

مثال: معادله‌ی داده شده را حل کنید.

$$xy'' - y' - x\sin\frac{y'}{x} = 0$$

معادله‌ی فوق فاقد y است قرار می‌دهیم $y' = P$.

حل:

$$x\frac{dP}{dx} - P - x\sin\frac{P}{x} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{P}{x} + \sin\frac{P}{x}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$u = \frac{P}{x} \rightarrow P = xu \qquad \frac{dP}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = u + \sin u$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(\csc u - \cot u) = \ln\left(\frac{1}{\sin u} - \frac{\cos u}{\sin u}\right) = \ln\left(\frac{1-\cos u}{\sin u}\right)$$

$$= \ln \frac{2\sin^2(\frac{u}{2})}{2\sin(\frac{u}{2})\cos(\frac{u}{2})} = \ln(\tan(\frac{u}{2})) + c$$

$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad$ یا $\; y'' = F(x, y, y') \leftarrow$

ج) معادلات مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم که فاقد متغیر مستقل یعنی x است.

$$y'' = \varphi(y, y')$$

برای حل قرار می‌دهیم: $y' = P$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dP}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{P} = \varphi(y, P)$$

مثال: معادله $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$ را حل کنید.

* معادله فوق فاقد x است قرار می‌دهیم $y' = P$.

$$2yP\frac{dP}{dy} - 3P^2 = 4y^2$$

معادله فوق برنولی است پس قرار می‌دهیم $P^2 = u$

Scanned by CamScanner

$$2p\frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy}$$

$$\rightarrow \left(y\frac{du}{dy} - 3u = 4y^2\right) \div y$$

$$\rightarrow \frac{du}{dy} - \frac{3}{y}u = 4y$$ ~~~ خطی مرتبه اول

$$u = e^{-\int -\frac{3}{y}dy}\left(c_1 + \int 4y e^{\int -\frac{3}{y}dy} dy\right)$$

$$\rightarrow u = y^3\left(c_1 + \int \frac{4}{y^2}dy\right) \rightarrow u = y^3\left(c_1 - \frac{4}{y}\right)$$

$$p^2 = u = (c_1y^3 - 4y^2) \rightarrow y' = p = \pm\sqrt{c_1y^3 - 4y^2}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1y^3 - 4y^2} \rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{c_1y^3 - 4y^2}} = \pm\int dx$$

د) به فرض معادله $F(x,y,y',y'')=0$ نسبت به y و y' و y'' همگن باشد یعنی:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n F(x,y,y',y'')$$

در این صورت تغییر متغیر $y = e^{\int z(x)dx}$ همگن است به حالت کرده و مرتبه‌ی معادله را پایین می‌آورد.

مثال: معادله $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$ را حل کنید.

$$yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$$ ← معادله نسبت به y و y' و y'' همگن است.

$$y = e^{\int z(x)dx}$$ ← پس قرار می‌دهیم

Subject
Date

$\rightarrow y' = z e^{\int z(x)dx} \rightarrow y'' = (z' + z^2) e^{\int z(x)dx}$

مقادیر فوق را در معادله داده شده قرار می دهیم

$$e^{2\int z dx} (z' + z^2 - z^2 - 6x) = 0$$

$$z' - 6x = 0 \rightarrow z = 3x^2 + c_1$$

$$y = e^{\int z(x)dx} = e^{\int (3x^2 + c_1)dx} = e^{(x^3 + c_1 x + d_1)} = e^{(x^3 + c_1 x)} \cdot \underbrace{e^{d_1}}_{c_2}$$

معادلات خطی مرتبه ی دوم و بالاتر:

تعاریف و مفاهیم اولیه:

$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \dots + f_n(x) y = g(x) \quad (1)$ معادله خطی مرتبه n غیرهمگن استاندارد است

الف) $g(x) = 0 \longrightarrow y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_n(x) y = 0$ خطی مرتبه ی n ام همگن گفته.

تعریف: توابع f_1 و f_2 و ... و f_n را در بازه ی I وابسته خطی گوییم اگر ثابت های c_1 و c_2 و ... و c_n که لااقل یکی از آن ها ناصفر است، وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x در I داشته باشیم:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

Scanned by CamScanner

Date

تعریف: توابع f_1 و f_2 و ... و f_n را روی بازه‌ی I مستقل خطی گوییم اگر وابسته‌ی خطی نباشند یا به بیان اصلی در این حالت تمامی ثابت‌ها باید صفر باشند.

تعیین کنید x^2 و x و 1 وابسته‌ی خطی و یا مستقل خطی هستند.

$$c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow c_3 = 0 \\ x = 1 \rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ x = -1 \rightarrow c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{مستقل خطی}$$

تعریف: توابع f_1 و f_2 و ... و f_n وابسته‌ی خطی است اگر و تنها اگر لااقل یکی از آن‌ها ترکیب خطی از توابع دیگر باشد.

* توابع $f_1 = x^2 - x$ ، $f_2 = 2x^2$ و $f_3 = 3x$

$$\rightarrow f_1 = \frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{3} f_3$$

تعریف: فرض کنید توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ و ... و $y_n(x)$ روی بازه‌ی I ، $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر باشند. در این صورت دترمینان زیر را با نماد $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ نشان می‌دهیم و به آن دترمینان رونسکین آن توابع گوییم.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

← اگر رونسکین مخالف صفر باشد ← مستقل خطی

← اما اگر رونسکین صفر شود هیچ نتیجه‌ای نمی‌شود.

مثال: رونسکین توابع زیر را بیابید. e^x , e^{-x}

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

مستقل خطی‌ها

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} = 0$$

$$\underbrace{e^{\lambda x}, e^{\lambda x}, \dots, e^{\lambda x}}_{n \text{ تابع}} \rightarrow \text{وابسته خطی}$$

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \rightarrow$$ مستقل خطی است به شرط اینکه

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$$

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = g(x) \qquad (1)$$

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

۱- اگر y_1 و y_2 دو جواب غیر صفر (۲) باشند آنگاه $y_1 + y_2$ نیز جواب آن است.

← معادله خطی استاندارد همگن نیز

$$(y_1 + y_2)'' + P_1(x)(y_1 + y_2)' + P_2(x)(y_1 + y_2) = 0$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$(y_1'' + f_1(x)y_1' + f_2(x)y_1) + (y_2'' + f_1(x)y_2' + f_2(x)y_2) = 0$$

$$\underbrace{\qquad}_{0} \qquad \underbrace{\qquad}_{0}$$

۲_ اگر y_1 یک جواب غیرصفر (۲) باشد و c عددی ثابت باشد آنگاه $cy_1 = y_2$ نیز جواب آن است.

۳_ اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله‌ی (۲) باشند و c_1 و c_2 اعداد ثابتی باشند آنگاه

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی آن است.

مثال: اگر y جواب عمومی (۱) و y_p جواب خصوصی آن باشد، نشان دهید $y - y_p$ جواب (۲) است؟

$$(y-y_p)'' + f_1(x)(y-y_p)' + f_2(x)(y-y_p) = 0$$

$$= \underbrace{(y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y)}_{g(x)} - \underbrace{(y_p'' + f_1(x)y_p' + f_2(x)y_p)}_{g(x)} = 0$$

جواب عمومی هر معادله‌ی خطی غیرهمگن برابر است با حاصل جمع جواب عمومی همگن نظیر آن (y_h) و جواب خصوصی معادله‌ی خطی غیرهمگن (y_p) یعنی: $y = y_h + y_p$

ساختن یک جواب (۲) برای یافتن جواب دیگر:

فرض y_1 یک جواب غیرصفر (۲) باشد برای یافتن جواب دیگر قرار می‌دهیم $y_2 = u(x)y_1$ (۳)

مشتق از (۳) ← $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ (۴)

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \quad (5)$$

(۳)، (۴) و (۵) را در (۲) قرار می‌دهیم.

$$u''y_1 + (2y_1' + F_1(x)y_1)u' + (y'' + F_1(x)y_1' + F_2(x)y_1)u = 0$$

چون از جواب (۲) است.

$$\rightarrow u'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + F_1(x)\right)u' = 0 \quad (6)$$

(۶) نسبت به u' جداپذیر است.

$$\rightarrow \int \frac{du'}{u'} + \int \frac{2dy_1}{y_1} = -\int F_1(x)\,dx$$

$$\rightarrow \ln u' + 2\ln y_1 = -\int F(x)dx$$

$$\rightarrow u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int F(x)dx}$$

$$\rightarrow u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int F_1(x)dx} dx \quad (7)$$

چون جواب دوم را می‌خواهیم ثابت انتگرال‌گیری را در (۷) به کار نمی‌بریم.

← با قرار دادن (۷) در (۳) جواب دوم به دست می‌آید.

PAPCO

Scanned by CamScanner

الف) $x = y_1$ یک جواب معادله زیر باشد جواب عمومی آن را بیابید.

همگن

$$(x^2y'' + xy' - y = 0) \times \frac{1}{x^2}$$ ← ضریب y'' باید ۱ باشد

$$\to y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \to P_1(x) = \frac{1}{x}$$

چون معادله دارای شکل خطی همگن است پس برای یافتن جواب دوم آن قرار می‌دهیم

$$\to y_2 = u(x)y_1 = xu(x)$$

برای یافتن $u(x)$ از رابطه (۷) استفاده می‌کنیم

$$u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

غیر همگن

$$x^2y'' + xy' - y = 1 \qquad y_1 = x$$

$$y = u(x)y_1 = xu(x)$$

$$\to y' = u + xu' \to y'' = 2u' + xu''$$

$$\to x^2(xu'' + 2u') + x(u + xu') - xu = 1$$

$$(\to x^3u'' + 3x^2u' + \cancel{xu} - \cancel{ux} = 1) \div x^3$$

معادله فوق فاقد متغیر تابع یعنی u است پس قرار می‌دهیم ← $u' = p$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{3}{x}p = \frac{1}{x^3}$$

Scanned by CamScanner

Date

$$P = e^{-\int \frac{3}{x} dx} \left(c_1 + \int \frac{1}{x^3} e^{\int \frac{3}{x} dx} dx \right)$$

$$\rightarrow u' = P = \frac{c_1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

$$\rightarrow u = -\frac{c_1}{2x^2} - \frac{1}{x} + c_2 \quad \rightarrow y_2 = xu$$

$$\rightarrow y = \underbrace{\underbrace{\left(-\frac{1}{2} c_1\right)}_{d} \frac{1}{x} + c_2 x}_{y_h} \underbrace{-1}_{y_p}$$

در حالات خاص زیر قادریم y_1، یک جواب معادله‌ی (۲) را حدس بزنیم:

① اگر $f_1(x) + x f_2(x) = 0$ آنگاه $y_1 = x$ یک جواب معادله‌ی (۲) است.

$$(2) \quad y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = 0$$

② اگر $\lambda^2 + \lambda f_1 + f_2 = 0$ آنگاه $y_1 = e^{\lambda x}$ به ازای λ عددی ثابت است.

مثال: $(x+1)y'' + (2x+1)y' + xy = 0$

$$\xrightarrow{\div (x+1)} \quad y'' + \frac{2x+1}{x+1} y' + \frac{x}{x+1} y = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 + \lambda f_1 + f_2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 + \frac{2x\lambda + \lambda}{x+1} + \frac{x}{x+1} = 0$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{\lambda^2 x + \lambda^2 + 2x\lambda + \lambda + x}{x+1} = 0 \rightarrow (\lambda^2 + 2\lambda + 1)x + \lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda^2 + \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$$

بعد از بدست آوردن y_1 ←

$$y_2 = u(x) y_1 \rightarrow y_2 = e^{-x} u(x)$$

از روش $y_2 = u y_1$ جواب دوم را بدست می آوریم.

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{e^{-2x}} e^{-\int \frac{2x+1}{x+1} dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{e^{-2x}} e^{-\int (2 - \frac{1}{x+1}) dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{e^{-2x}} e^{-2x + \ln(x+1)} dx = \int (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$y_2 = u(x) y_1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-x}$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = e^{-x}(c_1 + c_2(x+1)^2)$$

حل معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت:

معادلات زیر را در نظر می گیریم: $y'' + py' + qy = 0$ که در آن p و q ثابت هستند.

PAPCO

Scanned by CamScanner

(۲) به حسب و جواب به صورت $e^{\lambda x}$ هستیم که در آن λ عدد ثابتی است.

$y' = \lambda e^{\lambda x}$ (۳) $\longrightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ (۴)

(۲)، (۳) و (۴) را در (۱) قرار می‌دهیم و از $e^{\lambda x}$ فاکتور می‌گیریم.

$e^{\lambda x} (\lambda^2 + p y + q) = 0$

$\rightarrow \lambda^2 + p y + q = 0$ (۵)

(۵) را معادلهٔ کمکی یا مشخصهٔ (۱) گوییم.

به فرض λ_1 و λ_2 دو ریشهٔ معادلهٔ کمکی باشند برای نوشتن جواب عمومی (۱) سه حالت زیر را باید بررسی کنیم.

① λ_1 و λ_2 حقیقی و غیرمساوی

② λ_1 و λ_2 مختلط

③ λ_1 و λ_2 حقیقی و مساوی

① $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = e^{\lambda_2 x}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

دو جواب فوق مستقل خطی هستند پس جواب عمومی (۱) به صورت زیر است :

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

مثال :

$$\rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0$$

// معادله‌ی مشخصه $\rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ ⟨ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

مثال :

$$\rightarrow y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

// معادله‌ی مشخصه $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 2$$

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$$

② λ_1 و λ_2 مختلط هستند.

به فرض $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ و $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} . e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} . e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x)$$

دو رابطه‌ی اخیر را یک بار با هم جمع کرده و بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

و بار دیگر از همین لم کم کرده و بر $2i$ تقسیم می‌کنیم.

← به ترتیب به دست می‌آوریم: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$

دو جواب به دست آمده مستقل خطی هستند پس جواب عمومی در (۱) در این حالت به صورت زیر است.

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$$

مثال: $y'' + 2y' + 2y = 0$

حالت کلی ← $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm \sqrt{-1}$

$\rightarrow \lambda_1 = -1 + i \qquad \alpha = -1$

$\lambda_2 = -1 - i \qquad \beta = 1$

$$y_h = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

مثال: $y''' + 2y'' + 2y' = 0$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$\rightarrow \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = -1 + i , \lambda_3 = -1 - i$

$$y = c_1 e^0 + e^{-x}(c_2\cos x + c_3\sin x)$$

۳ ـ $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y_1 = e^{\lambda x} = y_2$$

در این حالت ۲ جواب مستقل خطی نمی‌باشند پس اگر $y_1 = e^{\lambda x}$ یک جواب باشد $y_2 = u(x)y_1$

Subject جلسه ی ۱۵
Date

«بنام او»

دوشنبه ۹۵/۷/۲۶

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-p}{2}$$

$$y_2 = e^{\lambda_1 x} \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx$$

$$= e^{\lambda_1 x} \int \frac{1}{e^{2\lambda_1 x}} e^{-\int p dx} dx$$

$$= e^{\lambda_1 x} \int \frac{1}{e^{2\lambda_1 x}} e^{-px} dx$$

$$\lambda_1 \to \frac{-p}{2} \qquad \Rightarrow y_2 = x e^{\lambda_1 x}$$

فرم جواب عمومی در این حالت به صورت زیر است:

$$y = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x)$$

اگر معادله ی داده شده از مرتبه ی n ام باشد معادله ی کلی از درجه ی n می باشد به فرض معادله ی کلی دارای k ریشه ی حقیقی مکرر باشد $(k \leq n)$ در این صورت فرم جواب عمومی برای این k ریشه به صورت زیر است.

حقیقی $\longrightarrow y_h = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1})$

اگر ریشه ها موهومی باشند: $y_h = e^{\alpha x}\Big[(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1})\cos\beta x + (c_{k+1} + c_{k+2} x + \cdots + c_{2k} x^{k-1})\sin\beta x\Big]$

مثال: معادله ی $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$

حل: معادله کلی: $\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$\lambda^4(\lambda^2+1)-(\lambda^2+1)=0 \rightarrow (\lambda^2+1)(\lambda^4-1)=0 \rightarrow (\lambda^2+1)(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)=0$$

$$\rightarrow (\lambda^2+1)^2(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=i \qquad \lambda_3=\lambda_4=-i$$

$$\lambda_5=1 \qquad \lambda_6=-1 \qquad \alpha=0 \qquad \beta=1$$

$$y_h = e^{0x}\left[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x\right]+c_5e^{x}+c_6e^{-x}$$

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

فرض کنیم $a_n = 12$ باشد

$$12 \;\Big|\; \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$$

عملگر یا اپراتور مشتق :

عملگر یا اپراتور مشتق $\quad Dy = \dfrac{dy}{dx} = y'$

$$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \qquad D^3y = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$y^{n} + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n y = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$ a_i ها

$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_n y = 0$ //

چندجمله‌ای اپراتور ← $(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)\, y = 0$ → معادله‌ی کمکی $F(\lambda) = 0$

$(D - b_1)(D - b_2) \cdots (D - b_n)\, y = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$ b_i ها ثابت.

$\Rightarrow (D^2 + 1)(D^2 - 1)\, y = 0$

اگر a_i ها ثابت نباشند برقرار نیست.

تمرین: نشان دهید: $(D-1)(D-x)\, y \neq (D-x)(D-1)\, y$

پس با استفاده از عملگر نشان دادیم:

(به تعداد ۲ دارد که باشه؟)

$y^{6} + y^{4} - y'' - y = 0 \xrightarrow{\text{معادل}} (D^2+1)^{②}(D^2-1)\, y = 0$

// (۳ دارد؟)

معادله‌ی کمکی → $(D^2 - 1)^{③}(D^2 - 2D + 5)^4\, y = 0 \rightarrow (\lambda^2 - 1)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^4 = 0$

$(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^4 = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -1 \end{array}\right\}$

$y_h = e^{x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + e^{-x}(c_4 + c_5 x + c_6 x^2)$

$+ e^{x}\left[(c_7 + c_8 x + c_9 x^2 + c_{10} x^3)\cos 2x + (c_{11} + c_{12} x + c_{13} x^2 + c_{14} x^3)\sin 2x\right]$

Scanned by CamScanner

معادلات خطی غیر همگن با ضرایب ثابت :

معادله‌ی مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(1) \qquad y'' + py' + qy = f(x)$$

که در آن p و q اعداد ثابتی هستند .

می‌دانیم جواب عمومی (1) به صورت زیر است :

$$y = y_h + y_p$$

(y_h ← جواب عمومی معادله‌ی همگن نظیر (1)؛ y_p → جواب خصوصی (1))

در این فصل می‌خواهیم y_p، جواب خصوصی (1) را بدون انتگرال به دست آوریم بدین منظور چند حالت خاص زیر را بررسی می‌کنیم.

۱- فرض کنید سمت راست (1) به صورت زیر باشد :

$$(2) \qquad f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n ام به صورت زیر است .

$$P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

فرض

$$(3) \qquad y_p = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

که در آن $Q_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n ام به صورت زیر است که باید ضرایبش مشخص گردد .

$$Q_n(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

B_i ها $1 \leq i \leq n$ که مجهول هستند.

$$y'_p = \alpha e^{\alpha x} Q_n(x) + e^{\alpha x} Q'_n(x)$$

$$y'_p = e^{\alpha x} \left[Q'_n(x) + \alpha Q_n(x) \right] \qquad (4)$$

$$y''_p = \alpha e^{\alpha x} \left[Q'_n(x) + \alpha Q_n(x) \right] + e^{\alpha x} \left[Q''_n(x) + \alpha Q'_n(x) \right]$$

$$y''_p = e^{\alpha x} \left[Q''_n(x) + 2\alpha Q'_n(x) + \alpha^2 Q_n(x) \right] \qquad (5)$$

(3) و (4) و (5) را در (1) به شکل راست آن (2) می باشد قرار می دهیم و در شکل حل از $e^{\alpha x}$ فاکتور می گیریم.

$$e^{\alpha x} \left[Q''_n(x) + (2\alpha + p) Q'_n(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) \right.$$

$$= e^{\alpha x} P_n(x) \qquad (6)$$

برای نوشتن جواب خصوصی در این شکل باید سه حالت زیر را بررسی کنیم.

الف) α ریشه معادله کلی نمی باشد

در این شکل اگر (3) را به عنوان جواب خصوصی در نظر بگیریم (6) تشکیل یک اتحاد را می دهد و برای مشخص کردن ضرایب B_i ها باید ضرایب جملات هم درجه در (6) را مساوی قرار داده ولی دستگاه (n+1) معادله و (n+1) مجهول حل کنیم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال: $y'' - ۳y' + ۲y = x e^{۰x}$

$\alpha = ۰$

$\rightarrow y'' - ۳y' + ۲y = ۰ \rightarrow \lambda^۲ - ۳\lambda + ۲ = ۰$

$\lambda_1 = ۱ \quad , \quad \lambda_۲ = ۲$

$y_h = c_1 e^{x} + c_۲ e^{۲x}$

$\alpha = ۰$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه نیست پس:

$y_p = e^{۰x}(B_۰ x + B_1)$

$y'_p = B_۰ \quad , \quad y''_p = ۰$

$۰ - ۳B_۰ + ۲(B_۰ x + B_1) = x$

$\rightarrow ۲B_۰ x + (۲B_1 - ۳B_۰)x^۰ = x$

$$\begin{cases} ۲B_۰ = ۱ & \text{ضریب } x^1 \rightarrow B_۰ = \frac{۱}{۲} \\ ۲B_1 - ۳B_۰ = ۰ & \text{ضریب } x^۰ \rightarrow B_1 = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

$y_p = \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۴}$

$y = y_h + y_p$

Scanned by CamScanner

$$y'_p = \alpha e^{\alpha x} Q_n(x) + e^{\alpha x} Q'_n(x) \rightarrow y'_p = e^{\alpha x}\left[Q'_n(x) + \alpha Q_n(x)\right]$$

ب) α ریشه ی معادله ی مشخصه است : $\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{p}{2}$

در این صورت (۶) تشکیل یک اتحاد را نمی دهد زیرا طرفین $Q_n(x)$ در سمت چپ (۶) صفر می گردد برای رفع این اشکال باید جواب خصوصی را به صورت زیر اختیار کنیم.

$$y_p = x e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ج) α ریشه ی مضاعف معادله ی مشخصه است

← فرم جواب خصوصی در این حالت به صورت زیر اختیار می شود.

$$y_p = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$$

به طور کلی اگر α ریشه ی معادله ی مشخصه باشد که k مرتبه تکرار شده باشد فرم جواب خصوصی برای آن باید به صورت

$$y_p = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

زیر اختیار شود.

تبصره : جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)$ به صورت زیر است :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_n}$$

که در آن y_{p_1} جواب خصوصی معادله ی $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)y = g_1(x)$ و y_{p_2} جواب خصوصی معادله ی $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)y = g_2(x)$ و ... و y_{p_n} جواب خصوصی معادله ی

Scanned by CamScanner

$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g_n(x)$ هستند.

مثال ۱: شکل جواب خصوصی معادله زیر را بنویسید.

$$D^2(D^2-4)^3(D^2+9)^2 y = x + x^2e^{2x} + 5e^{-2x} + 10$$

$(x+10)e^{0x}$

معادله مشخصه : $\lambda^2\underbrace{(\lambda^2-4)^3}_{(\lambda-2)^3(\lambda+2)^3}(\lambda^2+9)^2=0$

$\lambda_1=\lambda_2=0$

$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=2$

$\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=-2$

$\lambda_9=\lambda_{10}=3i$

$\lambda_{11}=\lambda_{12}=-3i$

$\alpha=0$ ریشه‌ی معادله مشخصه است که دو بار تکرار شده است پس:

$$y_{p_1} = x^2e^{0x}(A_0x + A_1)$$

$\alpha=2$ ریشه‌ی معادله مشخصه است که سه بار تکرار شده است پس:

$$y_{p_2} = x^3e^{2x}(B_0x^2 + B_1x + B_2)$$

$\alpha=-2$ ریشه‌ی معادله مشخصه است که سه بار تکرار شده است پس:

$$y_{p_3} = x^3e^{-2x}C$$

$\alpha=3$ ریشه‌ی معادله مشخصه نیست پس:

$$y_{p_4} = e^{3x}(E_0x^3 + E_1x^2 + E_2x + E_3)$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_{p_4}$$

Scanned by CamScanner

به فرض معادله (۱) به صورت زیر باشد:

$$(1)\quad y''+py'+qy=f(x)$$

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x\right]\quad (2)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله‌ای‌های برحسب x هستند می‌دانیم:

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}\qquad e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$$

$$\sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\qquad e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x$$

پس (۲) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}\left(\frac{p(x)}{2}+\frac{q(x)}{2i}\right)+e^{(\alpha-i\beta)x}\left(\frac{p(x)}{2}-\frac{q(x)}{2i}\right)$$

برای نوشتن جواب عمومی این معادله باید دو حالت زیر را بررسی کنیم.

الف) $\alpha+i\beta$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه نباشد، فرم جواب خصوصی این معادله به صورت زیر اختیار می‌شود.

$$y_p=e^{\alpha x}\left[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x\right]\quad (3)$$

که در آن درجه‌ی $u(x)$ و $v(x)$ برابر است با بزرگترین $p(x)$, $q(x)$

ب) $\alpha+i\beta$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه است، فرم جواب خصوصی این حالت به صورت زیر اختیار می‌شود.

$$y_p=xe^{\alpha x}\left[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x\right]$$

PaPCO
Scanned by CamScanner

به طور کلی اگر (۱) از مرتبه‌ی n اُم باشد و $\alpha+i\beta$ ریشه‌ی معادله‌ی کلی باشد که k مرتبه تکرار شده

باشد فرم جواب خصوصی برای این k ریشه به صورت زیر اختیار می‌شود.

$$y_p = x^k e^{\alpha x}\left[u(x)\cos\beta x + v(x)\sin\beta x\right]$$

مثال: معادله‌ی $y''-2y'+y=\sin x$

$$* \to y''-2y'+y=e^{0x}\sin x$$

$\quad \to \alpha=0$

ابتدا معادله‌ی همگن را حل کنیم $\to y''-2y'+y=0$

معادله‌ی کلی $\lambda^2-2\lambda+1=0 \to \lambda_1=\lambda_2=1$

$$y_h = c_1e^x + c_2xe^x = e^x(c_1+c_2x)$$

$\alpha+i\beta = 0+i = i \to$ ریشه‌ی معادله‌ی کلی نیست پس:

$$\to y_p = A\sin x + B\cos x \leadsto y'_p = A\cos x - B\sin x$$

$$\to y''_p = -A\sin x - B\cos x$$

جاگذاری در معادله $\leadsto$ * $\to -A\sin x - B\cos x - 2(A\cos x - B\sin x) + A\sin x + B\cos x = \sin x$

$$\to -2A\cos x + 2B\sin x = \sin x$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

ضریب کسینوس $\rightarrow -2A = 0 \rightarrow A = 0$ $\qquad y_p = \frac{1}{2}\cos x$

ضریب sin $\rightarrow 2B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}$

$$y = y_h + y_p$$

تذکر: فرم جواب های (۳) و (۴) به قوت خود باقی است حتی اگر سمت راست (۲) به یکی از اشکال زیر باشد

$$e^{\alpha x} p(x)\cos\beta x \quad \text{یا} \quad e^{\alpha x} q(x)\sin\beta x$$

مثال: فرم جواب خصوصی معادله زیر را بنویسید.

$$D^2(D^2-1)^3(D^2+4)^2 y = e^x + x^2 e^{-2x}\sin 2x + (\cos 2x + x\sin 2x) + 5e^{0x}$$

حل: معادله کمکی: $\lambda^2(\lambda^2-1)^3(\lambda^2+4)^2 = 0$

$$(\lambda^2-1)^3 = (\lambda-1)^3(\lambda+1)^3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\qquad \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = -1$ $\qquad \lambda_{11} = \lambda_{12} = -2i$

$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$ $\qquad \lambda_9 = \lambda_{10} = 2i$

$\rightarrow \alpha = 1$ ریشه ی معادله ی کمکی است که سه بار تکرار شده است پس:

$$y_{p_1} = x^3 A e^x$$

$\rightarrow \alpha + i\beta = -2 + 2i$ ریشه ی معادله ی کمکی نیست پس:

$$y_{p_2} = e^{-2x}\left[(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos 2x + (C_0x^2 + C_1x + C_2)\sin 2x\right]$$

$\rightarrow \alpha + i\beta = 0 + 2i$ ریشه ی معادله ی کمکی است که دو بار تکرار شده است پس:

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$y_{p_3} = x^2\left[(D_0x + D_1)\cos x + (E_0x + E_1)\sin x\right]$$

← $\alpha = 0$ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است به دو بار تکرار ریشه است:

$$y_{p_4} = x^2F$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_{p_4}$$

روش تغییر پارامتر:

معادلات زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x)$

(۲) $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$

می‌دانیم جواب عمومی (۱) به صورت زیر است:

$$y = y_p + y_h$$

y_p ← جواب خصوصی (۱)

y_h ← جواب عمومی (۲)

اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی (۲) باشند:

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی (۲) است. برای یافتن جواب خصوصی (۱) در این روش فرض می‌کنیم c_1 و c_2 توابعی برحسب x باشند و معادله‌ی زیر جواب خصوصی (۱) باشد:

(۳) $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$

$$y'_p = u'_1y_1 + u'_2y_2 + u_1y'_1 + u_2y'_2$$

قرار می‌دهیم $\quad u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (4)$

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2 \quad (5)$$

$$y''_p = u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + u_1 y''_1 + u_2 y''_2 \quad (6)$$

(۴) و (۵) و (۶) را در (۱) قرار می‌دهیم به دست می‌آوریم:

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + u_1 \underbrace{\left(y''_1 + f_1(x) y'_1 + f_2(x) y_1\right)}_{0} + u_2 \underbrace{\left(y''_2 + f_1(x) y'_2 + f_2(x) y_2\right)}_{0} = g(x)$$

چون y_1 و y_2 جواب‌های (۲) هستند.

$$\rightarrow u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x) \quad (7)$$

برای به دست آوردن u_1 و u_2 باید دستگاه معادلات (۴) و (۷) را حل کنیم یعنی دستگاه زیر را:

$$(8) \begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x) \end{cases}$$

اگر $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{W} = \frac{-y_2 (g(x))}{W}, \quad u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{y_1 (g(x))}{W}$$

Scanned by CamScanner

به فرض $u_1' = \varphi_1(x)$ و $u_2' = \varphi_2(x)$ جواب‌های دستگاه (۸) باشند، پس:

$$u_1 = \int \varphi_1(x)\,dx \quad (9) \qquad u_2 = \int \varphi_2(x)\,dx \quad (10)$$

با قرار دادن (۹) و (۱۰) در (۳) جواب خصوصی (۱) بدست می‌آید.

تذکره: اگر ثابت‌های انتگرال‌گیری را در (۹) و (۱۰) به کار ببریم با قرار دادن مقادیر حاصل در (۳) جواب عمومی (۱) بدست می‌آید.

اگر معادله (۱) از مرتبه nام باشد، دستگاه (۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(i)} + u_2' y_2^{(i)} + \dots + u_n' y_n^{(i)} = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(x) \end{cases}$$

به ازای $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$

مثال: معادله داده شده را حل کنید.

$$y'' + y = \tan x$$

$$y'' + y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Scanned by CamScanner

برای نوشتن جواب خصوصی معادله داده شده فرض می‌کنیم c_1 و c_2 توابعی برحسب x باشند و

$$y_p = \overset{?}{\underbrace{u_1(x)\cos x}_{y_1}} + \overset{?}{u_2(x)}\underbrace{\sin x}_{y_2}$$

برای یافتن u_1 و u_2 باید دستگاه (۸) را تشکیل داده و حل کنیم یعنی دستگاه زیر را:

$$\begin{cases} u'_1\cos x + u'_2 \sin x = 0 \\ u'_1(-\sin x) + u'_2(\cos x) = \tan x \end{cases}$$

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-(\sin x \tan x)}{1}$$

$$u'_1 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$u_1 = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$$

Scanned by CamScanner

معادله‌ی کوشی ـ اویلر :

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

که در آن a_i ها $0 \leq i \leq n$ اعداد ثابت و $a_0 \neq 0$.

معادله‌ی فوق را به کمک دو روش زیر حل می‌کنیم.

(به خاطر $\ln|x|$)

۱ـ تغییر متغیر $x=e^t$ یا $t=\ln x$ معادله‌ی فوق را به معادله‌ی خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند ← $(x>0)$

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

زنجیره‌ای $\longrightarrow -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$ ($\frac{dt}{dx} \to \frac{1}{x}$)

$$\rightarrow y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \qquad (3)$$

(۲) و (۳) را در (۱) قرار می‌دهیم.

$$\rightarrow a_0 x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1 x \cdot \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dt}\right) + a_2 y = 0$$

$$\rightarrow a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

Scanned by CamScanner

مثال: معادله $x^2y''-2xy'-4y=0$ را حل کنید.

$$\to x^2y''-2xy'-4y=0$$

$a_0=1$

$a_1=-2$

$a_2=-4$

تغییر متغیر: $x=e^t$, $t=\ln x$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(-2-1)\frac{dy}{dt}-4y=0$$

معادله مشخصه: $\lambda^2-3\lambda-4=0 \to (\lambda-4)(\lambda+1)=0$ ، $\lambda=-1$ ، $\lambda=4$

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{4t}$$

$$y_h=c_1x^{-1}+c_2x^{4}$$

مثال: معادله $x^2y''+3xy'+y=x$ را حل کنید.

تغییر متغیر: $x=e^t \to t=\ln x$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(3-1)\frac{dy}{dt}+y=e^t$$

ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم: $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2dy}{dt}+y=0$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0 \to \lambda_1=\lambda_2=-1$$

$$y_h=(c_1+c_2t)e^{-t}$$

$$y_h=(c_1+c_2\ln x)x^{-1}$$

Scanned by CamScanner

$\alpha = 1$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه نیست پس $y_p = Ae^t$.

$$y_p' = Ae^t \quad , \quad y_p'' = Ae^t$$

$$e^t(A + 2A + A) = e^t \longrightarrow 4A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4}e^t = \frac{1}{4}x$$

$$y = y_h + y_p = x^{-1}(c_1 + c_2 \ln x) + \frac{1}{4}x$$

نوشتن معادلات برحسب اپراتور $\longrightarrow D = \frac{d}{dt}$

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}Dy \qquad (۲)$$

$$y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \qquad (۳)$$

$$= \frac{1}{x^2}(D^2y - Dy)$$

$$= \frac{1}{x^2}D(D-1)y$$

$$y''' = \frac{1}{x^3}D(D-1)(D-2)y$$

$\vdots$

$$y^{(n)} = \frac{1}{x^n}D(D-1)(D-2)\dots\underbrace{(D-n+1)}_{-(n-1)}y$$

$$(۱) \quad a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$$

۲- تغییر متغیر $y = x^m$ (۲) به ازای m مقداری است در معادله‌ی (۱) صدق می‌کند.

$y' = mx^{m-1}$ (۳) $\longrightarrow$ $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ (۴)

(۲) و (۳) و (۴) را در (۱) قرار می‌دهیم و از x^m فاکتور می‌گیریم.

$$x^m\left[a_0 m(m-1) + a_1 m + a_2\right] = 0$$

$$a_0 m^2 + (a_1 - a_0)m + a_2 = 0 \quad (۵)$$

به فرض m_1 و m_2 دو ریشه‌ی معادله‌ی (۵) باشند برای نوشتن جواب عمومی (۱) سه حالت زیر را باید بررسی کنیم.

۱- $m_1 \neq m_2$ ، m_1 و m_2 حقیقی هستند: در این حالت دارای دو جواب مستقل خطی به صورت $y_1 = x^{m_1}$ و $y_2 = x^{m_2}$ هستیم.

$$\frac{y_1}{y_2} = x^{m_1 - m_2} \neq \text{ثابت}$$

پس فرم جواب عمومی (۱) در این حالت به صورت زیر است:

$$y_h = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

مثال: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

$$y = x^m \longrightarrow y' = mx^{m-1} \longrightarrow y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$x^m\left[m(m-1) - 2m + 2\right] = 0 \longrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$(m-1)(m-2)=0 \quad \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 2 \end{cases} \qquad y_h = c_1 x + c_2 x^2$$

۲- $m_1 = m_2$ ، $y_1 = x^{m_1} = y_2$

← در این حالت y_1 و y_2 مستقل خطی نمی‌باشند پس اگر $y_1 = x^{m_1}$ یک جواب (۱) باشد برای یافتن

جواب دوم قرار می‌دهیم:

$$y_2 = y_1 u(x) = x^{m_1} u(x)$$

$$y_2 = x^{m_1} \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx$$

$\div a_0 x^2 \longrightarrow$ $a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \quad (1)$

↑ برای تبدیل شکل به استاندارد

$$y_2 = x^{m_1} \int \frac{1}{x^{2m_1}} e^{-\int \frac{a_1}{a_0 x} dx} dx$$

$$= x^{m_1} \int \frac{1}{x^{2m_1}} \underbrace{e^{-\frac{a_1}{a_0} \ln x}}_{x^{-\frac{a_1}{a_0}}} dx$$

$$= x^{m_1} \int \frac{1}{x \cdot x^{-\frac{a_1}{a_0}}} x^{-\frac{a_1}{a_0}} dx = x^{m_1} \int \frac{1}{x} dx = x^{m_1} \ln x$$

$$a_0 m^2 + (a_1 - a_0) m + a_2 = 0 \quad (5)$$

$$m_1 = m_2 = \frac{-(a_1 - a_0)}{2a_0}$$

Scanned by CamScanner

فرم جواب عمومی (۱) در این حالت به صورت زیر است.

$$y_h = x^{m_1}\,(c_1 + c_2 \ln x)$$

مثال: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

$$y = x^m$$

$$x^m\left[m(m-1) - 3m + 4\right] = 0 \;\rightarrow\; m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\rightarrow (m-2)^2 = 0 \;\rightarrow\; m_1 = m_2 = 2$$

$$y_h = x^2\left[c_1 + c_2 \ln x\right]$$

۳- m_1 و m_2 موهومی هستند:

اگر $m_1 = \alpha + i\beta$

$m_2 = \alpha - i\beta$

$$y_1 = x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha}\cdot x^{i\beta} = x^{\alpha}\left(e^{\ln x}\right)^{i\beta} = x^{\alpha} e^{i\beta\ln x}$$

$$= x^{\alpha}\left[\cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x)\right]$$

$$y_2 = x^{\alpha-i\beta} = x^{\alpha}\cdot x^{-i\beta} = x^{\alpha}\left(e^{\ln x}\right)^{-i\beta} = x^{\alpha}\cdot e^{-i\beta\ln x}$$

$$= x^{\alpha}\left[\cos(\beta\ln x) - i\sin(\beta\ln x)\right]$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

روالله ابتدا رایک بار با هم جمع کرده و بر 2 تقسیم می کنیم و یک بار از هم کم کرده و بر $2i$ تقسیم می کنیم.

به ترتیب با یک می آوریم: $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$ و $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$

دو جواب بالا یک ادله مستقل خطی هستند پس فرم جواب عمومی (۱) در این حالت به صورت زیر است.

$$y_h = x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)\right]$$

مثال: $4x^2y'' + 17y = 0 \qquad y(1) = -1$

$y'(1) = 0$

$$y = x^m$$

$$x^m\left[4m(m-1) + 17\right] = 0 \rightarrow 4m^2 - 4m + 17 = 0$$

$$\Delta' \rightarrow m_1 = m_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-68}}{4} = \frac{1}{2} \pm 2i$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = 2$$

$$y_h = x^{\frac{1}{2}}\left[c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)\right]$$

$$c_1 = -1 \qquad y = -x^{\frac{1}{2}}\cos(2\ln x)$$

$$c_2 = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = u(x)v(x)$ در معادله $y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = g(x)$ برحسب را سایلـه

معادله فوق به معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل گردد

Subject : جلسه ۱۴ ۹۵,۹,۱۰ دوشنبه

Year . Month . Date . ( )

با استفاده از تغییر متغیر $y=u(x)v(x)$ (۲)

شرایطی را بیابید که معادله $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=g(x)$ (۱) قابل حل باشد

$$y'=u'v+uv' \quad (۳)$$

$$y''=u''v+2u'v'+uv'' \quad (۴)$$

۲ و ۳ و ۴ را در (۱) قرار می‌دهیم.

$$u''v+(2v'+P_1(x)v)u'+(v''+P_1(x)v'+P_2(x)v)u=g(x) \quad (۵)$$

در (۵) ضریب u' را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$2v'+P_1(x)v=0$ جدایی‌پذیر

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{1}{2}P_1(x)\,dx \to \ln v = -\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx$$

$$\to v=e^{-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx}$$

$$v'=-\frac{1}{2}P_1(x)\,v \quad (۷) \qquad v''=-\frac{1}{2}P_1'v-\frac{1}{2}P_1v'$$

$$v''=-\frac{1}{2}P_1'v+\frac{1}{4}P_1^2v \quad (۸)$$

مقادیر فوق را در ۵ قرار داده و در سمت چپ از v فاکتور می‌گیریم.

$$v\left[u''+\left(-\frac{1}{2}P_1'+\frac{1}{4}P_1^2-\frac{1}{2}P_1^2+P_2\right)u\right]=g(x)$$

Scanned by CamScanner

Subject :
Year . Month . Date . ( )

$$u'' + \left(f_2 - \tfrac{1}{2} f_1' - \tfrac{1}{4} f_1^2\right) u = \frac{g(x)}{v} \quad (1)$$

۹) به معادله کوشی تبدیل می‌شود اگر:

$$f_2 - \tfrac{1}{2} f_1' - \tfrac{1}{4} f_1^2 = \frac{\text{ثابت}}{x^2}$$

یا

$$\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} = \frac{\text{ثابت}}{(ax+b)^2} \quad (\text{ثابت } b, a =)$$

۷) به معادله مرتبه ۲ با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود اگر

$$f_2 - \tfrac{1}{2} f_1' - \tfrac{1}{4} f_1^2 = \text{ثابت}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$y'' - 2y' tgx - 10y = xe^x \sec x$$

$$f_2 = -10 , \quad f_1 = -2tgx$$

$$f_2 - \tfrac{1}{2} f_1' - \tfrac{1}{4} f_1^2 = -10 - \tfrac{1}{2}(-2 \sec^2 x)$$

$$= -10 + \underbrace{\sec^2 x - tg^2 x}_{1} = -9$$

پس برای حل معادله داده شده می‌توانیم از تغییر متغیر $y = u(x)v(x)$ استفاده کنیم

Scanned by CamScanner

برای حل کردن $v(x)$ از (۲) استفاده می‌کنیم

$$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int -2\tan x\,dx} = e^{\ln \sec x} = \sec x$$

برای بدست آوردن $u(x)$ باید معادله (۹) را حل کنیم یعنی معادله زیر را

$$u'' - 9u = \frac{x e^{x} \sec x}{\sec x} = x e^{x}$$

$$u'' - 9u = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 3 , \lambda_2 = -3$$

$$u_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

$$(D^2 - 9)u = x e^{x} \longrightarrow u_p = \frac{1}{D^2 - 9}(x e^{x})$$

تمرین:

$$x^2 y'' + (x - 4x^2) y' + (1 - 2x + 4x^2) y = 0$$

- به ازای چه مقادیری از k معادله با شرایط مرزی زیر دارای جواب غیرصفر است

$$y'' + ky = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \\ 0 < x < l \end{cases}$$

الف) $k = 0$

$$y'' = 0 \quad , \quad y' = A$$

$$y = A^{?} x + B^{?}$$

$$y(0) = 0 = A \cdot 0 + B$$

$$y(l) = 0 = Al + B \Longrightarrow A = B = 0 \Longrightarrow y = 0$$

بدیهی

Ariyan

Subject :

Year . Month . Date . ( )

ب) به فرض $k = -\mu^2 < 0$

$$y'' - \mu^2 y = 0$$

معادله مشخصه : $\lambda^2 - \mu^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \mu \quad , \quad \lambda_2 = -\mu$

$$y = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

$y(0) = 0 = Ae^0 + Be^0$

$y(l) = 0 = Ae^{\mu l} + Be^{-\mu l}$ $\Longrightarrow A = B = 0 \Longrightarrow y = 0$ بدیهی

ج) به فرض $k = \mu^2 > 0$

$$y'' + \mu^2 y = 0$$

معادله مشخصه : $\lambda^2 + \mu^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i\mu \quad , \quad \lambda_2 = -i\mu$

$$y = A\cos\mu x + B\sin\mu x$$

$y(0) = 0 = A\cos 0 + B\sin 0 \Longrightarrow A = 0$

$y(l) = 0 = \underset{0}{A}\cos\mu l + B\sin\mu l \rightarrow B\sin\mu l = 0$

اگر $B = 0 \leftarrow y = 0$ جواب بدیهی پس $B \neq 0$

$\sin\mu l = 0 = \sin \pi n$

مقادیر ویژه $\mu_n = \dfrac{n\pi}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

جواب های ویژه

$$y_n = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

پایان میان ترم

Scanned by CamScanner

Subject جلسه‌ی پانزدهم « نمادا او » دوشنبه ۱۷/۸/۹۵

Date

← معادله‌ای است نسبت به y' درجه ۲ است.

$$\underbrace{xy}_{a}y'^2 - \underbrace{(2x^2+y^2)}_{b}y' + \underbrace{2xy}_{c} = 0$$

$$y' = \frac{2x^2+y^2 \pm \sqrt{(2x^2+y^2)^2 - 8x^2y^2}}{2xy}$$

$$y' = \frac{2x^2+y^2 \pm \sqrt{(2x^2-y^2)^2}}{2xy} \rightarrow y' = \frac{2x^2+y^2 \pm (2x^2-y^2)}{2xy}$$ ← جدایی پذیر

$$2xy' + y'^3y^2 - y = 0$$

$$2xy' = y - y'^3y^2 \rightarrow x = \frac{y}{2y'} - \frac{y^2y'^2}{2}$$

$$y' = p$$

$$x = \frac{y}{2p} - \frac{1}{2}y^2p^2 \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2p} - \frac{2y\frac{dp}{dy}}{p^2} - yp^2 - y^2p\frac{dp}{dy}$$

۱۰

با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله دیفرانسیل زیر را به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل و سپس حل کنید.

$$(2x\cos^2 y)\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy = 0$$

$$x^2 = u \rightarrow 2x\,dx = du$$

$$\Rightarrow (\cos^2 u)\,du + (2y - u\sin 2y)\,dy = 0$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{2y - u\sin 2y}{\cos^2 y} \rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{\sin 2y}{\cos^2 y}u = \frac{2y}{\cos^2 y}$$ ← خطی ۱۰

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$(y^{\frac{2}{3}}) + (y')^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\div a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y'}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\frac{y}{a} = \sin^3\theta \rightarrow y = a\sin^3\theta$$

$$\frac{y'}{a} = \cos^3\theta \rightarrow y' = a\cos^3\theta$$

$$\uparrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cancel{a}\sin^2\theta\,\cancel{\cos\theta}\,\frac{d\theta}{dx} = \cancel{a}\cos^{\cancel{3}\,2}\theta$$

$$\rightarrow 3\sin^2\theta\,\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\theta$$

$$\tan^2\theta\, d\theta = \frac{1}{3}dx$$

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری های توانی ←

تعریف: یک سری توانی برحسب توان های $(x-a)$ عبارت است از یک سری نامتناهی به صورت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

که در آن a را مرکز سری و x را متغیر سری و c_0 و c_1 و ... اعداد ثابتی هستند.

اگر $a=0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

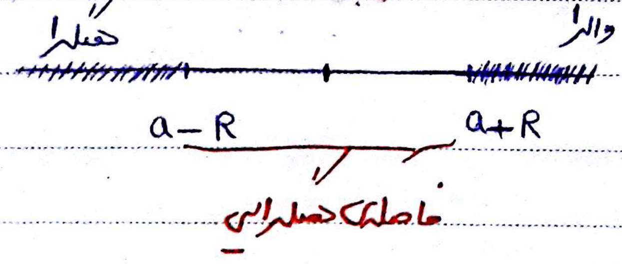
اگر $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} c_n(x-a)^n$ موجود باشد گوییم سری همگرا است. بدیهی است که سری فوق در $x=a$ همگرا است.

مثال:

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ ← فقط در $x=0$ همگرا است.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ← به ازای جمیع مقادیر x همگرا است.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ← به ازای $|x|<1$ همگرا است (به سمت $\frac{1}{x-1}$ میل می‌کند).



$|x-a|<R$ ← شعاع همگرایی

Scanned by CamScanner

* آزمون دالامبر یا نسبت :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$$

1) $L<1$ ← همگرا

2) $L>1$ ← واگرا

3) $L=1$ ← آزمون کاربرد ندارد.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \left\{ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right\} < 1$$

$$|x-a| < \frac{1}{\frac{1}{R}}$$

$$\rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

← اعمال روی سری توانی :

1) مشتق سری جمله به جمله :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad , \quad R>0$$

$$F(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

$$F'(x) = 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

$$\rightarrow F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \quad , \quad R>0$$

Scanned by CamScanner

$$F''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \quad , \quad R>0$$

2) جمع جمله به جمله :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad , \quad R>0$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \quad , \quad R>0$$

$$F(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm b_n)(x-a)^n \quad , \quad R>0$$

3) ضرب جمله به جمله :

$$F(x).g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n \quad , \quad R>0$$

$$d_n = c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0$$

4) صفر شدن تمام ضرایب : اگر یک سری توانی برحسب توان های $(x-a)$ و با شعاع همگرایی $R>0$ در فاصله‌ی همگرایی اش متحد با صفر باشد آنگاه ضرایبش در آن فاصله مساوی صفر است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = 0 \quad , \quad R>0 \rightarrow c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = \cdots = 0$$

تعریف : $F(x)$ در $x=a$ تحلیلی است هرگاه بتوانیم آن را به صورت یک سری توانی برحسب توان های $(x-a)$ و با شعاع $R>0$ نشان دهیم.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad R>0$$

به عبارت دیگر در همسایگی $x=a$ دارای بسط تیلور باشد.

Scanned by CamScanner

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \qquad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

مثال: تابع $F(x)=\frac{1}{1-x^2}$ در چه نقاطی تحلیلی است؟

← در تمام نقاط به جز $x=\pm1$ تحلیلی است.

* قضیه: اگر توابع $F(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ در معادله دیفرانسیل $y''+F(x)y'+g(x)y=h(x)$

در $x=a$ تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب $y(x)$ از این معادله در $x=a$ تحلیلی است. یعنی جواب

معادله‌ی فوق را می‌توانیم به صورت زیر اختیار کنیم:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \quad , \quad R>0$$

اگر توابع $F(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ در $x=a$ در معادله‌ی زیر $F(x)y''+g(x)y'+h(x)y=0$

تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب $y(x)$ از این معادله در $x=a$ تحلیلی است.

مثال: به کمک سری توانی معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y'-y=0$$

← وقتی می‌گه به کمک سری توانی یعنی $x=a=0$

((چون ضرایب y' و y در همسایگی $x=0$ دارای بسط تیلوری باشند پس $x=0$ یک نقطه‌ی تحلیلی معادله‌ی داده

شده است، بنابراین معادله دارای جوابی به صورت زیر است.)) *

Scanned by CamScanner

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

$$y' = 0 + c_1 + 2c_2 x + \cdots + (n+1) c_{n+1} x^n + \cdots$$

مقادیر فوق را در معادله ی داده شده قرار می دهیم :

$$c_1 + 2c_2 x + \cdots + (n+1) c_{n+1} x^n + \cdots - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots) = 0$$

$$\Rightarrow (c_1 - c_0) + (2c_2 - c_1) x + \cdots + \left[(n+1) c_{n+1} - c_n \right] x^n + \cdots = 0$$

ضریب x^0 : $c_1 - c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0$

ضریب x : $2c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2}$

⋮

ضریب x^n : $(n+1) c_{n+1} - c_n = 0 \Rightarrow c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1} \Rightarrow$ فرمول یا الگوی بازگشتی

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \infty$$

$n = 2$: $c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3 \times 2} = \frac{c_0}{3!}$

⋮

$n = n-1$: $c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \frac{c_0}{n!}$

$$y = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

$$y = c_0 \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right)}_{e^x}$$

Scanned by CamScanner

مثال: معادله را حل کنید. $y''+xy'-y=0$

قضیه مثال حل : « .... » * :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , R>0$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad , R>0 \quad , y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$$

$$2c_2 - c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1) c_{n+2} + (n-1) c_n\right) x^n = 0$$

ضریب x^0 : $2c_2 - c_0 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{c_0}{2}$

⋮

ضریب x^n : $(n+2)(n+1) c_{n+2} + (n-1) c_n = 0 \rightarrow c_{n+2} = \frac{(1-n)c_n}{(n+2)(n+1)}$

اسم فرمول یا الگوی بازگشتی

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+2}} \right| = \infty \qquad |x|<\infty$$

$n=1$: $c_3 = 0$

$n=2$: $c_4 = \frac{-c_2}{4\times 3} = \frac{-c_0}{4\times 3\times 2}$

Scanned by CamScanner

تمام ضرایب فرد بعد از ۱ صفرند، یعنی:

$$c_{2n+1} = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cancel{c_3 x^3}_{\to 0} + c_4 x^4 + \cancel{c_5 x^5}_{\to 0} + \cancel{\cdots}_{\to 0}$$

$$y = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4 \times 3 \times 2} x^4 - \cdots \right) + \underbrace{c_1 x}_{\to y_1}$$

$$y_2 = u(x) y_1 = y_1 \int \frac{1}{x^2} e^{-\int x\, dx} = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

که البته روش های قبل می‌خواستیم حل کنیم.

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

Subject جلسه‌ی 17 «لجاندر» دوشنبه 95/8/24
Date

معادله‌ی لژاندر و چندجمله‌ای‌های لژاندر:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (1)$$ که در آن α عددی ثابت است.

$$\div (1-x^2) \Rightarrow y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}y = 0$$

چون ضرایب y' و y در همسایگی $x=0$ دارای بسط تیلور می‌باشند پس $x=0$ یک نقطه‌ی معمولی معادله است بنابراین معادله دارای جوابی به صورت زیر است.

$$(2) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$(3) \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$(4) \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

(2)، (3) و (4) را در (1) قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$
$$+ \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

قرار می‌دهیم:
$n \to n+2$

$$2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n$$
$$-2c_1 x - 2\sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^n + \alpha(\alpha+1)c_0 + \alpha(\alpha+1)c_1 x$$
$$+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 0$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$2c_2 + \alpha(\alpha+1)c_0 + \left[6c_3 + \underbrace{(-2+\alpha^2+\alpha)}_{(\alpha-1)(\alpha+2)}c_1\right]x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + \underbrace{(-n^2+\underbrace{n-2n}_{-n}+\alpha^2+\alpha)}_{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}c_n\right]x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\dots+u_k+\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$$

ضریب x^0 : $2c_2 + \alpha(\alpha+1)c_0 = 0 \rightarrow c_2 = \dfrac{-\alpha(\alpha+1)c_0}{2!}$

ضریب x^1 : $6c_3 + (\alpha-1)(\alpha+2)c_1 = 0 \rightarrow c_3 = \dfrac{-(\alpha-1)(\alpha+2)c_1}{3! = 6}$

⋮

ضریب x^n : $(n+2)(n+1)c_{n+2} + (\alpha-n)(\alpha+n+1)c_n = 0$

$$\rightarrow c_{n+2} = \frac{-(\alpha-n)(\alpha+n+1)c_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$R = \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+2}}\right| = 1 \qquad |x|<1$$

$n=2$ $\quad c_4 = \dfrac{-(\alpha-2)(\alpha+3)}{4\times 3}$

$$c_4 = \frac{(\alpha-2)(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+3)c_0}{4\times3\times2 = 4!}$$

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

$$y = c_0\underbrace{\left[1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \dots\right]}_{R_\alpha(x)} + c_1\underbrace{\left[x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \dots\right]}_{S_\alpha(x)}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$y = c_0 R_\alpha(x) + c_1 S_\alpha(x)$$

در مسائل فیزیکی اغلب α با عددهای صحیح و نامنفی در نظر می‌گیرند به فرض $\alpha = n$ و n عدد صحیح

و نامنفی باشد پس $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \dots = 0$

اگر n زوج باشد $R_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n و $S_n(x)$ یک سری است و اگر n فرد باشد $S_n(x)$ که

یک چند جمله‌ای از درجه n و $R_n(x)$ یک سری است این چند جمله‌ای ها که در یک ضریب ثابت ضرب شده

به چند جمله‌ای های لژاندر موسوم‌اند برای یافتن فرمولی برای این چند جمله‌ای ها را باید فرض می‌کنیم:

$$c_\alpha = \frac{(2\alpha)!}{(2)^\alpha (\alpha!)^2} \quad , \quad c_0 = 1$$

و فرمول بازگشتی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\alpha - 2K \geq 0 \rightarrow K \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$c_n = \frac{-(n+2)(n+1)\, c_{n+2}}{(\alpha - n)(\alpha + n + 1)}$$

$$c_{\alpha-2} = \frac{-\alpha(\alpha-1)\, c_\alpha}{2(2\alpha-1)} = \frac{-\alpha(\alpha-1)}{2(2\alpha-1)} \cdot \frac{(2\alpha)!}{(2)^\alpha \underbrace{(\alpha!)^2}_{(\alpha!)(\alpha!)}}$$

$$c_{\alpha-2} = \frac{-\alpha(\alpha-1)(2\alpha)(2\alpha-1)(2\alpha-2)!}{2(2)^\alpha (\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)!\,(\alpha)(\alpha-1)!\,(\alpha-1)}$$

$$c_{\alpha-2} = \frac{-(2\alpha-2)!}{(2)^\alpha (\alpha-1)!\,(\alpha-2)!}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

به صورتی می‌توانیم نشان دهیم

$$C_{\alpha-2K} = \frac{(-1)^K (2\alpha-2K)!}{(2)^\alpha (\alpha-K)!(\alpha-2K)!\,K!}$$

چند جمله‌ای لژاندر را با $P_n(x)$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P_n(x) = \sum_{K=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^K (2n-2K)!\, x^{n-2K}}{(2)^n (n-K)!\,(n-2K)!\,K!}$$

$P_0(x) = 1$ $\quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = ?$

می‌توانیم نشان دهیم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(-1+x^2)^n$$

فرمول فوق به فرمول رودریگز موسوم است.

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3\, 3!} \frac{d^3}{dx^3}(-1+x^2)^3$$

$$= \frac{1}{8\times6} \frac{d^3}{dx^3}(-1+3x^2-3x^4+x^6)$$

$$= \frac{1}{8\times6}(0-3\times4\times3\times2x+6\times5\times4x^3) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$y = a P_n(x) + b Q_n(x)$$ a و b ثابت

چند جمله‌ای لژاندر — سری لژاندر

یکی از ویژگی‌های مهم چند جمله‌ای لژاندر این است که :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} (P_2(x))^2\, dx = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} P_3(x) P_6(x) = 0$$

مثال :

$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ فرض کنید $f(x)$ روی بازه $[-1,1]$ دارای خواص $P_n(x)$ باشد انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n\, dx$$

$$u = f(x) \rightarrow du = f'(x)\, dx$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)\, dx \rightarrow v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$$

Scanned by CamScanner

Date

$$= \frac{+1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} uv + \frac{(-1)}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \, dx$$

عمل انتگرال گیری را (n-1) بار دیگر تکرار می کنیم و بدست می آوریم:

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) \, (x^2-1)^n \, dx$$

$\mapsto P_m^{(n)}(x)$

اگر $n>m$ باشد مقدار انتگرال فوق صفر می شود.

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = n! \, c_n = \frac{(2n)! \, n!}{2^n (n!)^2}$$

$$= \frac{(2n)! \, (-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx = \ominus \int \cos^{2n+1}\theta \, d\theta$$

$(1-x^2)^n$

$\mapsto x = \sin\theta \rightarrow dx = \cos\theta \, d\theta$

$= \dots = \frac{2}{2n+1}$

مرحله به مرحله به تعداد n بار

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \, dx$$

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \, dx = \frac{2 c_n}{2n+1} \,, \quad n = m$$

$$\rightarrow c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \, dx$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0 \quad (1)$ ، $x=a$ را یک نقطه‌ی منفرد معادله‌ی (1) گوییم اگر $f(a)=0$

تعریف: $x=a$ را یک نقطه‌ی منفرد منظم معادله‌ی (1) گوییم اگر توابع $(x-a)\frac{g(x)}{f(x)}$ و $(x-a)^2\frac{h(x)}{f(x)}$

در همسایگی a ، $x=a$ دارای بسط تیلور باشند. یا به عبارت دیگر معادله‌ی (1) را بتوان به صورت زیر نوشت.

$$(2) \qquad y'' + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n}{x-a} y' + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n}{(x-a)^2} y = 0$$

مثال: نشان دهید که $x=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم معادله‌ی بسل زیر است.

$$\underbrace{x^2}_{f(x)} y'' + \underbrace{x}_{g(x)} y' + \underbrace{(x^2-\alpha^2)}_{h(x)} y = 0$$

که در آن α عددی ثابت است.

$$\div x^2 \longrightarrow y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2}(x^2-\alpha^2) y = 0$$

$$(x-\underset{0}{a})\frac{g(x)}{f(x)} = x \times \frac{1}{x} = 1$$

$$(x-a)^2\frac{h(x)}{f(x)} = x^2 \times \frac{1}{x^2}(x^2-\alpha^2) = x^2-\alpha^2$$

چون ضرایب y' و y چندجمله‌ای‌اند در x و x^2 ضرب شده‌اند در همسایگی 0 ، $x=0$ دارای بسط تیلور می‌باشند

پس $x=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم معادله‌ی بسل داده شده است. اگر $x=a$ یک نقطه‌ی منفرد منظم معادله‌ی

(1) باشد آنگاه این معادله حداقل دارای یک جواب به صورت زیر است.

Date

$$(3)\qquad y_1=(x-a)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \qquad c_0\neq 0$$

به دنبال r هستیم ابتدا.

$$y=c_0(x-a)^r+c_1(x-a)^{r+1}+\cdots$$

$$y'=c_0r(x-a)^{r-1}+c_1(r+1)(x-a)^r+\cdots$$

$$(4)\qquad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,c_n(x-a)^{n+r-1}$$

$$(5)\qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)(x-a)^{n+r-2}$$

(3) و (4) و (5) را در (2) قرار دهیم.

$$x(x-a)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n(x-a)^{n+r-2}+\left(\frac{d_0+d_1(x-a)+\cdots}{x-a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(x-a)^{n+r-1}$$

$$+\left(\frac{b_0+b_1(x-a)+\cdots}{(x-a)^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^{n+r}=0 \qquad (6)$$

در 6 ضریب کوچکترین توان $(x-a)$ را مساوی صفر قرار دهیم.

$$r(r-1)c_0+d_0rc_0+b_0c_0=0 \qquad c_0\neq 0$$

$$r(r-1)+d_0r+b_0=0 \qquad (7)$$

(7) را معادله شاخص یا اندیسی گوییم. به فرض r_1 و r_2 ریشه‌های معادله شاخص باشند و $r_1>r_2$

Scanned by CamScanner

برای نوشتن جواب عمومی (1) به حالات زیر باید بررسی کرد.

1 - تفاضل r_1 و r_2 عدد صحیح نمی‌باشد و در این صورت دارای دو جواب مستقل خطی به صورت زیر هستیم

$$y_1=(x-a)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

$$y_2=(x-a)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$$

پس از محاسبه‌ی c_n ها و A_n ها فرم جواب عمومی (1) در این مسئله به صورت زیر می‌باشد

$y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$ که در آن α_1 و α_2 اعداد ثابتی هستند.

2 - در این حالت اگر تفاضل r_1 و r_2 عدد صحیح است. $y_1=(x-a)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ یک جواب است حالا باید جواب دوم را در حالت کلی نمی‌توان به صورت مستقل قبل در نظر گرفت زیرا می‌توانیم نشان دهیم که دو جواب مستقل قبل مستقل خطی نمی‌باشند

پس از محاسبه‌ی c_n ها فرم جواب دوم را باید آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$y_2=K y_1 \ln x+(x-a)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$$

پس از محاسبه‌ی A_n ها و K فرم جواب عمومی (1) به صورت زیر می‌باشد: $y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$

3 - تفاضل r_1 و r_2 صفر است و مانند مسئله قبل عمل می‌کنیم یعنی ابتدا فرم جواب اول را به دست می‌آوریم ولی باید دقت داشته باشیم که فرم جواب را به صورت زیر انتخاب کنیم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

$$y_2 = y_1 \ln x + (x-a)^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x-a)^n$$

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \text{عبارت}$$

$$x^2 y'' - x y' + y = 0 \qquad y_2 = u(x) y_1 = x u(x)$$

$$y_2 = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{1}{x} dx} dx = x \int \frac{1}{x} dx = x \ln x$$

مثال : $2x^2 y'' - x y' + (1+x) y = 0$

$$\div 2x^2 \longrightarrow \left(y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} (1+x) y = 0 \right)$$

$$x \left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 \left(\frac{1}{2x^2}\right)(1+x) = \frac{1}{2}(1+x)$$

چون ضرایب y' و y به ترتیب در x و x^2 ضرب شده‌اند در همسایگی $x=0$ دارای بسط تیلوری باشند پس

$x=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم معادله‌ی داده شده است بنابراین معادله حداقل دارای یک جواب به صورت زیر است.

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad c_0 \neq 0$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)\, c_n x^{n+r-2}$$

مقادیر بالا / معادلات فوق را در معادله ی داده شده قرار میدهیم

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r-1} = 0$$

$$\div x^r \quad (*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1\right] c_n x^{n+\not{r}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\not{r}+1} = 0$$

برای نوشتن معادله ی شاخص یا اندیسی باید ضریب کوچکترین توان x را در $(*)$ مساوی صفر قرار دهیم.

$$(2r(r-1) - r + 1)\, c_0 = 0 \qquad c_0 \neq 0$$

$$2r^2 - 3r + 1 = 0$$

$$(2r-1)(r-1) = 0$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = \frac{1}{2}$$

$r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$ عدد صحیح نیست پس دارای دو جواب مستقل خطی به صورت زیر هستیم:

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad , \quad y_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

برای کاستن C_n ها باید در (*) به جای ۲ مشتق ۱ را بذاریم و برای کاستن A_n ها باید در (*)

به جای ۲ مشتق $\frac{1}{2}$ و به جای C_n و A_n بذاریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\underbrace{2(n+1)(n)-n}_{n(2n+1)}\cancel{-1}\cancel{+1}\Big]c_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}=0$$

ضرب x^0 : $0(0+1)c_0=0 \Rightarrow$ c_0 یا را اختیاری یعنی هر مقداری را می‌تواند اختیار کند.

ضرب x^1 : $1(2+1)c_1+c_0=0 \Rightarrow c_1=\frac{-c_0}{3}$

$\vdots$

ضرب x^n : $n(2n+1)c_n+c_{n-1}=0 \Rightarrow c_n=\frac{-c_{n-1}}{n(2n+1)}$

$n=2$: $c_2=\frac{-c_1}{2\times5}=\frac{c_0}{2\times3\times5}$, $n=3$: $c_3=\frac{-c_2}{3\times7}=\frac{-c_0}{2\times3\times5\times7\times3}$

, $n=\dots$

$y_1=x(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots)$ فرض : $c_0=1$

$y_1=x\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2\times3\times5}x^2-\cdots\right)$

$a_0=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\frac{g(x)}{f(x)}$, $b_0=\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\frac{h(x)}{f(x)}$

* باید حتما به ازای هر حالت بزرگتر بذاریم در غیر این صورت نمره ندارد.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject جلسه 19 «ابراهام» دوشنبه ۱، ۹، 95
Date

اگر $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2}$ یک جواب معادله $x^2 y'' + 5xy' + (x+4)y = 0$ باشد جواب

عمومی آن را بیابید.

$r(r-1) + d_0 r + b_0 = 0 \qquad y_1 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$d_0 = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{g(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{5}{x} = 5$$

$$b_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{h(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{(x+4)}{x^2} = 4$$

$r(r-1) + 5r + 4 = 0 \to r^2 + 4r + 4 = 0$

$\to (r+2)^2 = 0 \to r_1 = r_2 = -2 \to r_1 - r_2 = 0$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \to \left(y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-2}\right) \times (x+4)$$

$\times 5x \quad y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2) c_n x^{n-3}$

$\times x^2 \quad y_2'' = y_1'' \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3) c_n x^{n-4}$

چون y_1 جواب معادله داده شده است. $\leftarrow 0$

$$(x^2 y_1'' + 5xy_1' + (x+4)y_1) \ln x + 2xy_1' - y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-3)(n-2) c_n x^{n-2}$$

$$+ 5y_1 + 5\sum_{n=1}^{\infty} (n-2) c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-2} = 0$$

$$\to 2xy_1' + 4y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left((n-3)(n-2) + 5(n-2) + 4 \right) c_n x^{n-2} \right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1} = 0$$

PAPCO

$$2\cancel{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^{n-\cancel{3}\,2}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^{n-2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}n^2c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{n-1}=0$$

$$\cancel{2(-2)x^{-2}}+\cancel{4(1)(x^{-2})}+2(-1)(-1)x^{-1}+4(-1)x^{-1}+c_1x^{-1}=0$$

ضریب x^{-2} : 0

ضریب x^{-1} : $(-2+c_1)x^{-1}=0 \rightarrow -2+c_1=0 \rightarrow c_1=2$

ضریب x^{0} ....

⋮

معادلات بسل :

$$(1)\quad x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$$

که در آن α عدد ثابتی است. قبلاً دیدیم که $x=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم معادله‌ی بسل است پس معادله حداقل دارای یک جواب به صورت زیر است :

$$(2)\quad y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \qquad c_0\neq 0$$

$$(3)\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

$$(4)\quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2}$$

(2)، (3)، و (4) را در (1) قرار می‌دهیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\div x^r \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\overbrace{(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \alpha^2}^{(n+r)^2 - \alpha^2} \Big] c_n x^{n+\cancel{r}}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\cancel{r}+2} = 0 \quad (5)$$

برای نوشتن معادله‌ی شاخصی باید ضریب کوچکترین توان x را در (5) مساوی صفر قرار دهیم.

$$(r^2 - \alpha^2)\, c_0 = 0 \qquad c_0 \neq 0$$

$$r^2 = \alpha^2 \rightarrow r_1 = \alpha$$

$$r_2 = -\alpha$$

به فرض α عدد صحیح و مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ نباشد پس دارای دو جواب مستقل خطی به صورت زیر هستیم.

$$y_1 = x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y_2 = x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

برای محاسبه‌ی c_n ها باید در (5) به جای r مقدار α را قرار دهیم.

P4PCO

Scanned by CamScanner

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\alpha)^2-\alpha^2\right]c_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+2}=0$$

ضریب x^0: $\left[(0+\alpha)^2-\alpha^2\right]c_0=0$ (0) c_0 دلخواه

ضریب x^1: $\left[(1+\alpha)^2-\alpha^2\right]c_1=0 \longrightarrow c_1=0$ ($1+2\alpha$)

ضریب x^2: $\left[(2+\alpha)^2-\alpha^2\right]c_2+c_0=0 \longrightarrow c_2=\dfrac{-c_0}{2^2(1+\alpha)}$ ($4+4\alpha$)

⋮

ضریب x^n: $\left[(n+\alpha)^2-\alpha^2\right]c_n+c_{n-2}=0 \longrightarrow c_n=\dfrac{-c_{n-2}}{n(n+2\alpha)}$

تمام ضرایب فرد صفر هستند یعنی:

$c_{2n+1}=0 \qquad n=0,1,2,3,\dots$

ضریب x^4: $c_4=\dfrac{-c_2}{4(4+2\alpha)}=\dfrac{c_0}{2^4(1+\alpha)(2+\alpha)\,2!}$

($4 = 2^2$, $4+2\alpha = 2(2+\alpha)$)

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}(1+\alpha)(2+\alpha)\dots(n+\alpha)\,n!}$$

$$y_1=x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}x^{2n}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

برای خلاصه کردن ضرایب از تابع گاما استفاده می‌کنیم و این تابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \, dx \qquad x>0$$

خواص تابع گاما:

(1) $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{h \to \infty} \left[-e^{-x}\right]_0^h = 1$$

(2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

به فرض n عدد صحیح و مثبت باشد

(3) $\Gamma(n+1) = n!$

(4) $\Gamma(\alpha+n+1) = (1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)\Gamma(\alpha+1)$

چون c_0 پارامتر است آن را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$c_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} \underbrace{(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)\Gamma(\alpha+1)}_{\Gamma(\alpha+n+1)} 2^\alpha n!}$$

Scanned by CamScanner

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\alpha}\,\Gamma(\alpha+n+1)\,n!}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} = J_\alpha(x)$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه ی α

$$y_2 = J_{-\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\alpha}$$

برای نوشتن جواب عمومی معادله ی بسل دو حالت زیر را باید بررسی کنیم

(1) α عدد صحیح نمی باشد ، در این حالت $J_\alpha(x)$ و $J_{-\alpha}(x)$ مستقل خطی هستند بسل نوع جواب .

عمومی در این حالت به صورت زیر است :

$$y = c_1 J_\alpha(x) + c_2 J_{-\alpha}(x)$$

c_1 و c_2 ثابت .

جواب عمومی معادله ی بسل زیر را بنویسید .

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{25}\right)y = 0 \qquad (\alpha^2)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{25} \rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{5}$$

$$y = c_1 J_{\frac{1}{5}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{5}}(x)$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

(2) α عدد صحیح است ؛ می‌توانیم نشان دهیم که وقتی که α عدد صحیح است :

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^{\alpha} J_{\alpha}(x)$$

در این صورت $J_{\alpha}(x)$ و $J_{-\alpha}(x)$ مستقل خطی نمی‌باشند بسل اگر $y_1 = J_{\alpha}(x)$ یک جواب معادله باشد

با استفاده از تغییر متغیر $y_2 = u(x) y_1$ می‌توانیم جواب دوم را بیابیم. بدون اثبات می‌پذیریم که فرم جواب

دوم را به صورت زیر اختیار کنیم.

$$y_2 = Y_{\alpha}(x) := \frac{J_{\alpha}(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$

تابع بسل نوع دوم از مرتبه α

فرم جواب عمومی در این حالت به صورت زیر است.

$$y = c_1 J_{\alpha}(x) + c_2 Y_{\alpha}(x)$$

c_1 و c_2 اعداد ثابت

PAPCO

Scanned by CamScanner

جلسه 20 — شنبه ۹۵/۹/۶

Subject :
Year . Month . Date . ( )

معادله $x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \alpha^2)y = 0$ که در آن k عدد ثابتی است با استفاده از تغییر متغیر $Z = kx$ به معادله بسل تبدیل می‌شود ($\to x = \frac{Z}{k}$)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad (k)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dz}\right) = k \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} = k^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

جایگذاری
$$\Rightarrow \frac{z^2}{k^2} \cdot k^2\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z}{k} \cdot k\frac{dy}{dz} + (z^2 - \alpha^2)y = 0$$

$$y = aJ_\alpha(z) + bY_\alpha(z)$$

$$y = aJ_\alpha(kx) + bY_\alpha(kx)$$

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$x^2y'' + xy' + (4x^2 - 25)y = 0 \quad (z = 2x)$$

$Z = 2x \qquad \alpha^2 = 25 \to \alpha = \pm 5$

$$y = aJ_5(2x) + bY_5(2x)$$

مثال: با استفاده از تغییر متغیر $Z = x^{1/2}$ معادله زیر را حل کنید

$$4x^2y'' + 4xy' + (x-1)y = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \quad (2)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}x^{-3/2}\frac{dy}{dz} + \tfrac{1}{2}x^{-1/2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \tfrac{1}{4}x^{-1}\frac{d^2y}{dz^2} - \tfrac{1}{4}x^{-3/2}\frac{dy}{dz} \quad (3)$$

Scanned by CamScanner

Subject :
Year . Month . Date . ( )

(۲) و (۳) را در (۱) قرار می‌دهیم

$$4x^2\left(\frac{1}{4}x^{-1}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{4}x^{-3/2}\frac{dy}{dz}\right)+4x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dy}{dz}\right)+(x-1)y=0$$

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-1)y=0$$

$$y=aJ_1(z)+bY_1(z),\quad z=x^{1/2}$$

مثال: با استفاده از تغییر متغیرهای داده شده معادله زیر را حل کنید

$$x^2y''-xy'+9(x^6-8)y=0 \qquad y=x^2u,\quad z=x^3$$

$$y'=2xu+x^2u' \quad , \quad y''=2u+4xu'+x^2u''$$

$$x^2(x^2u''+4xu'+2u)-x(x^2u'+2xu)+9(x^6-8)(x^2u)=0$$

$\div x^2$

$$x^2u''+3xu'+9(x^6-8)u=0$$

$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \quad \left(\frac{dz}{dx}=3x^2\right)$$

$$u''=\frac{du'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(3x^2\frac{du}{dz}\right)=6x\frac{du}{dz}+3x^2\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \quad \left(\frac{dz}{dx}=3x^2\right)$$

$$u''=9x^4\frac{d^2u}{dz^2}+6x\frac{du}{dz}$$

جایگذاری: $x^2\left(9x^4\frac{d^2u}{dz^2}+6x\frac{du}{dz}\right)+3x\left(3x^2\frac{du}{dz}\right)$

$$+9(x^6-8)u=0$$

Ariyan

Scanned by CamScanner

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - 8)u = 0$$

$$u = a\, J_{2\sqrt{2}}(z) + b\, J_{-2\sqrt{2}}(z)$$

$$y = x^2 u$$

مثال: اگر $J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$ نشان دهید

1- $\frac{d}{dx}\left(x^\alpha J_\alpha(x)\right) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$

2- $\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha} J_\alpha(x)\right) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^\alpha J_\alpha(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+2\alpha}}{2^{2n+\alpha}\, n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2\alpha)\, x^{2n+2\alpha-1}}{2^{2n+\alpha-1}\, n!\,\underbrace{\Gamma(n+\alpha+1)}_{(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^\alpha}{n!\,\Gamma(n+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-1}$$

$$= x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

$$x^{-\alpha}\left(\alpha x^{\alpha-1} J_\alpha(x) + x^\alpha J'_\alpha(x) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)\right)$$

$$x^\alpha\left(-\alpha x^{-\alpha-1} J_\alpha(x) + x^{-\alpha} J'_\alpha(x) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)\right)$$

Ariyan

Scanned by CamScanner

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$\frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) + J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x)$$

$$-\frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) + J'_\alpha(x) = -J_{\alpha+1}(x)$$

روابط فوق را یکبار از هم کردن و بار دیگر با هم جمع می‌کنیم:

$$\boxed{\frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x)}$$

$$\boxed{2 J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x)}$$

تمرین: نشان دهید

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

مثال: $J_{3/2}(x)$ را برحسب $J_{1/2}(x)$, $J_{-1/2}(x)$ بنویسید

$$\alpha = 1/2 \rightarrow \frac{2 \times 1/2}{x} J_{1/2}(x) = J_{-1/2}(x) + J_{3/2}(x)$$

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x)$$

Scanned by CamScanner

Subject :
Year . Month . Date . ( )

تبدیل لاپلاس

تعریف : انتگرال زیر را در صورت وجود تبدیل لاپلاس $f(t)$ گوییم که آن را

با نماد $F(s)$ یا $L[f(t)]$ نشان می دهیم که L حرف اول لاپلاس است

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad t>0,\ s>c$$

در صورت وجود یعنی $\lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-st} f(t)\,dt$ باید موجود باشد

اگر $f_1(t)=f_2(t)$ پیوسته باشد آنگاه $L[f_1(t)]=L[f_2(t)]$ و بالعکس

معکوس تبدیل لاپلاس را با نماد L^{-1} نشان داده به صورت زیر تعریف می کنیم

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}L[f(t)] = f(t)$$

- تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد

$$L[f_1(t)] = F_1(s) \qquad L[f_2(t)] = F_2(s)$$

آنگاه برای ثابت های c_1 و c_2 داریم

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Ariyan

Scanned by CamScanner

Subject :
Year . Month . Date . ( )

تابع F(t) در بازه $[0,\infty]$ هم مرتبه (نمایی) با c گوییم اگر

ثابت های M و c چنان وجود داشته باشد به ازای t های به اندازه

کافی بزرگ داشته باشیم. $|F(t)| \leq Me^{ct}$

$M=1$
$C=0$
$|\sin t| \leq 1$

Jozve Bartar

Scanned by CamScanner

Subject جلسه 21 «به نام او» 95.9.13 شنبه

Date

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad t>0,\ s>c$$

فرض کنید $f(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ پیوسته قطعه‌ای و به ازای $t>T$ هم مرتبه نمایی

باشد در این صورت تبدیل لاپلاس $f(t)$ به ازای $s>c$ موجود است.

$$\left|L[f(t)]\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leqslant \underbrace{\left|\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt\right|}_{I_1\ \text{موجود}} + \underbrace{\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right|}_{I_2}$$

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_T^\infty e^{-st} |f(t)|\,dt$$

$$\leqslant M\int_T^\infty e^{-st} e^{ct}\,dt$$

$$\leqslant M\int_0^\infty e^{-(s-c)t}\,dt$$

$$= M \lim_{h\to\infty} \left(-\frac{1}{s-c} e^{-(s-c)t}\right)\Big]_0^h \qquad s>c$$

$$= \frac{M}{s-c} \qquad s>c$$

Scanned by CamScanner

$s \to \infty \Rightarrow F(s) \to 0$

$$L\left[t^{-\frac{1}{2}}\right] = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-st}\, dt$$

$st = x \to t = \frac{x}{s}$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \frac{dx}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}\, dx}$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
① ثابت a	$\frac{a}{s}$
② $e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{s \mp \alpha}$ $\quad s > \alpha$
③ $e^{i\alpha t}$	$\frac{s + i\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
④ t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
⑤ t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
⑥ $\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
⑦ $\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$

① $L[a] = a L[1]$

$$= a \int_0^\infty (1) e^{-st}\, dt$$

$$= a \lim_{h \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^h$$

$$= \frac{a}{s} \quad s > 0$$

$$L^{-1}\left[\frac{5}{s}\right] = 5$$

② $$L\left[e^{\alpha t}\right] = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st} e^{\alpha t}}_{e^{-(s-t)}}\, dt$$

$$= \frac{1}{s - \alpha} \quad s > \alpha$$

③ $$L\left[e^{i\alpha t}\right] = \frac{1}{s - i\alpha} = \frac{s + i\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

⑧	$\cosh \alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
⑨	$\sinh \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

④ $L[t^a] = \int_0^\infty e^{-st}\, t^a\, dt$

$= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$

⑥ $L[\cos \alpha t] = \int_0^\infty e^{-st} \cos \alpha t \, dt$

$L[e^{i\alpha t}] = L[\cos \alpha t + i \sin \alpha t]$

$\downarrow$

$\frac{s+i\alpha}{s^2+\alpha^2} = L[\cos \alpha t] + i L[\sin \alpha t]$

$L[\cos \alpha t] = \frac{s}{s^2+\alpha^2} \qquad L[\sin \alpha t] = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

مثال: $L[5t^2 + 4\sin 2t]$

$L[5t^2+4\sin 2t] = 5L[t^2] + 4L[\sin 2t] = \frac{5\times 2!}{s^3} + \frac{4\times 2}{s^2+4}$

مثال: $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3s+2}\right]$, $s^2-3s+2 = (s-1)(s-2)$

$= L^{-1}\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}\right]$ (with $A = -1$, $B = 1$)

$= -L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$

معامل s^1: $A + B = 0 \rightarrow A = -B$

معامل s^0: $-2A - B = 1 \rightarrow A = -1$

$= -e^{t} + e^{2t}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

$$L^{-1}\left[\frac{5s-4}{s^2+3}\right] = 5L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3}\right] - \frac{4}{\sqrt{3}}L^{-1}\left[\frac{1\times\sqrt{3}}{s^2+3}\right]$$

$$= 5\cos\sqrt{3}t - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t$$

تبدیل لاپلاس مشتق :

فرض کنید $f(t)$ و $f'(t)$ و ... و $f^{(n-1)}(t)$ پیوسته و هم مرتبه‌ی نمایی با ثابت c باشند و $f^{(n-1)}(t)$ پیوسته‌ی قطعه‌ای باشد آنگاه داریم :

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n \overbrace{L\left[f(t)\right]}^{F(s)} - \left(s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\right)$$

اگر $n=1 \rightarrow L\left[f'(t)\right] = sL\left[f(t)\right] - f(0)$

اگر $n=2 \rightarrow L\left[f''(t)\right] = s^2L\left[f(t)\right] - sf(0) - f'(0)$

$\vdots$

@JozveBartarOfficial

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

اثبات

$u = e^{-st}$ $\qquad dv = f'(t)\,dt$

$du = -se^{-st}\,dt$ $\qquad v = f(t)$

$$L[f'(t)] = -f(0) + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{L[f(t)]}$$

//

مثال: به کمک تبدیل لاپلاس معادلات زیر را حل کنید.

$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0$

$\qquad y'(0) = 1$

$$L[y'' - 3y' + 2y] = L[0]$$

$$L[y''] - 3L[y'] + 2L[y] = 0$$

$$s^2 L[y] - s\overbrace{y(0)}^{0} - \overbrace{y'(0)}^{1} - 3\,(sL[y] - \overbrace{y(0)}^{0}) + 2L[y] = 0$$

$$(s^2 - 3s + 2)\,L[y] = 1$$

$$\rightarrow L[y] = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \rightarrow L^{-1}L[y] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 3s + 2}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}\right]$$

$$\rightarrow y = -e^{t} + e^{2t}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

با استفاده از تبدیل لاپلاس مشتق، تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید:

$f(t) = t\cos\alpha t \qquad f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1$

$f'(t) = \cos\alpha t - \alpha t \sin\alpha t$

$L[f''(t)] = L[-2\alpha \sin\alpha t - \alpha^2 t\cos\alpha t]$

$s^2 L[f(t)] - s f(0) - f'(0) = -2\alpha L[\sin\alpha t] - \alpha^2 L[t\cos\alpha t]$

$\downarrow$ $t\cos\alpha t$

$(s^2+\alpha^2) L[t\cos\alpha t] = 1 - \dfrac{2\alpha^2}{s^2+\alpha^2} = \dfrac{s^2-\alpha^2}{s^2+\alpha^2}$

$L[t\cos\alpha t] = \dfrac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$

اگر $L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ آنگاه برای هر α ثابتی داریم:

$L[e^{\pm\alpha t} f(t)] = F(s \mp \alpha)$

$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)} f(t)\,dt = F(s-\alpha)$

$L^{-1}[F(s-\alpha)] = e^{\alpha t} L^{-1}[F(s)] = e^{\alpha t} f(t)$

$+ \qquad e^{-\alpha t}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$L\left[e^{-3t}t^2\right] = \frac{2!}{(s+3)^3}$$

$$L[t^2] = \frac{2!}{s^3}$$

$$L^{-1}\left[\frac{s+5}{s^2+2s+7}\right] = L^{-1}\left[\frac{(s+1)+4}{(s+1)^2+6}\right]$$

($5 \to 4+1$, $7 \to 1+6$)

$$= L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+6}\right] + 4L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+6}\right]$$

$$= e^{-t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+6}\right] + \frac{4}{\sqrt{6}}e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1\times\sqrt{6}}{s^2+6}\right]$$

$$= e^{-t}\cos\sqrt{6}\,t + \frac{4}{\sqrt{6}}e^{-t}\sin\sqrt{6}\,t$$

$$L^{-1}\left[\frac{5}{(s-1)^4}\right] = \frac{5}{3!}e^{t}L^{-1}\left[\frac{1\times 3!}{s^4}\right] = \frac{5}{3!}t^3e^t$$

$n+1=4$

$n=3$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<3 \\ t & 3\leqslant t<4 \\ 0 & t\geqslant 4 \end{cases}$$

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= \int_0^3 (1)e^{-st} + \int_3^4 te^{-2t}\,dt + \int_4^\infty e^{-st}(0)\,dt$$

تعریف تابع پله‌ای واحد: تابع پله‌ای واحد را با نماد $u_\alpha(t)$ یا $u(t|\alpha)$ نشان

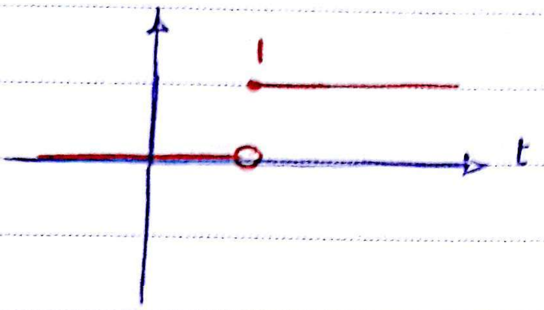
می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ 1 & t \geq \alpha \end{cases} \qquad \alpha \geq 0$$



$$L[u_\alpha(t)] = \int_0^\infty e^{-st} u_\alpha(t)\, dt$$

$$= \int_0^\alpha 0 + \int_\alpha^\infty (1) e^{-st}\, dt = \frac{e^{-s\alpha}}{s}$$

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

Subject جلسه 22   «بنام او»   دوشنبه 95.9.15
Date

مثال : تابع زیر را برحسب تابع پله ای واحد بنویسید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 2 & 1<t<3 \\ -4 & 3\leq t<4 \\ 5 & t\geq 4 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0+0+0=0 & t<1 \\ 2+0+0=2 & 1<t<3 \\ 2-6+0=-4 & 3\leq t<4 \\ 2-6+9=5 & t\geq 4 \end{cases}$$

ستونی حالت عمودی ببینیم

$$= 2u_1(t) - 6u_3(t) + 9u_4(t)$$

$$L[f(t)] = \int_1^3 (2)e^{-st}\,dt + \int_3^4 e^{-st}(-4)\,dt + \int_4^\infty (5)e^{-st}\,dt$$

$$L[u_\alpha(t)] = \frac{e^{-\alpha s}}{s}$$

در این مثال $= 2\frac{e^{-s}}{s} - 6\frac{e^{-3s}}{s} + 9\frac{e^{-4s}}{s}$

* اگر $L[f(t)] = F(s)$ آنگاه برای هر $\alpha>0$ داریم:

$$L[u_\alpha(t)\,f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}u_\alpha(t)\,f(t-\alpha)\,dt$$

$$= \int_0^\alpha 0 + \int_\alpha^\infty e^{-st}f(t-\alpha)\,dt$$

$\int_0^\alpha \to 0$

فرض:
$t-\alpha = x$
$t\to\alpha \Rightarrow x\to 0$
$t\to\infty \Rightarrow x\to\infty$
$dt = dx$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$= \int_0^\infty e^{-s(x+\alpha)} f(x)\,dx$$

$$= e^{-s\alpha} \underbrace{\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx}_{L[f(x)] = F(s)}$$

$$L^{-1}\left[e^{-\alpha s} F(s)\right] = L^{-1} L\left[u_\alpha(t) f(t-\alpha)\right] = u_\alpha(t) f(t-\alpha).$$

میتوانیم انتقال دهیم :

$$L\left[u_\alpha(t) f(t)\right] = e^{-s\alpha} L\left[f(t+\alpha)\right]$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$\cos t \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$$

(0 → 1: صعود ؛ 1 → 0: نزول)

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-st} \cos t\,dt + \int_{2\pi}^\infty 0 \;\;(\to 0)$$

$$f(t) = \cos t\,(+u_0(t) - u_{2\pi}(t))$$

(+ : صعود ؛ − : نزول)

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$L[F(t)] = L[u_0(t)\cos t] - L[u_{2\pi}(t)\cos t]$$

$$= e^{-0S} L[\cos(t+0)] - e^{-2\pi S} L[\underbrace{\cos(t+2\pi)}_{\cos t}]$$

$$= \frac{S}{S^2+1} - \frac{S e^{-2\pi S}}{S^2+1}$$

* اگر $F(t)$ در شرایط قضیه وجودی تبدیل لاپلاس صدق کند $L[F(t)] = F(S)$ صدق کند آن گاه

$$L\left[\int_0^t F(z)\,dz\right] = \frac{1}{S} F(S)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{S} F(S)\right] = \int_0^t F(z)\,dz$$

مثال :

$$L\left[\int_0^t \cos z\,dz\right] = \frac{1}{S} L[\cos t] = \frac{1}{S}\cdot\frac{S}{S^2+1} = \frac{1}{S^2+1}$$

$$L^{-1}\left[\frac{4}{S^3+16S}\right]$$

روش ① $= L^{-1}\left[\frac{A}{S} + \frac{BS+C}{S^2+16}\right]$

روش ② $= L^{-1}\left[\frac{1}{S}\cdot\underbrace{\frac{4}{S^2+16}}_{\sin 4t}\right] = \int_0^t \sin 4z\,dz = -\frac{1}{4}\cos 4z\Big]_0^t = \frac{1-\cos 4z}{4}$

$$L^{-1}\left[\frac{4}{S^2+16}\right] = \sin 4t$$

$$L^{-1}\left[\frac{4}{S^4+16S^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{S}\cdot\underbrace{\frac{1}{S}\cdot\frac{4}{S^2+16}}_{\frac{1-\cos 4z}{4}}\right] = \int_0^t \frac{1-\cos 4z}{4}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مشتق تبدیل لاپلاس: فرض کنید $f(t)$ در شرایط (قضیه) وجود تبدیل لاپلاس صدق کند و $L[f(t)]=F(s)$

آنگاه داریم:

$$F^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n}F(s) = \frac{d^{(n)}}{ds^n}L[f(t)]$$

$$= L[(-1)^n t^n f(t)]$$

اگر $n=1$:
$$F'(s) = L[-tf(t)]$$

$$\frac{d}{ds}L[f(t)] = \frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)\right)dt = \int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))\,dt = L[-tf(t)]$$

$$F'(s) = L[-tf(t)]$$

$$L^{-1}[F'(s)] = L^{-1}L[-tf(t)] \rightarrow \underset{=\,L^{-1}[F(s)]}{f(t)} = -\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]$$

(exp1) $$L[\underbrace{t\sin\alpha t}_{f(t)}] = -\frac{d}{ds}L[\sin\alpha t] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)$$

$$= \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$$

$$L[\sin\alpha t] = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

$$L^{-1}\left[\ln\frac{s}{s+4}\right] = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\ln\left(\frac{s}{s+4}\right)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\ln s - \ln(s+4)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4}\right]$$

$$= -\frac{1}{t}\left(1-e^{-4t}\right) = \frac{e^{-4t}-1}{t}$$

$$L^{-1}\left[\cot^{-1}(s)\right] \longrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\cot^{-1}s\right] = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{\sin t}{t}$$

مثال: معادله ی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. J_0 یک جواب $\longrightarrow$ بسل مرتبه ی ۰

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0 \qquad y(0) = 1$$

$$L[ty''] + L[y'] + L[ty] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}L[y''] + L[y'] - \frac{d}{ds}L[y] = 0$$

به فرض $L[y] = Y(s)$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y - sy(0) - y'(0)\right) + sY - y(0) - \frac{dY}{ds} = 0$$

$$-\left(2sY + s^2Y' - y(0)\right) + sY - y(0) - Y' = 0$$

$$-(s^2+1)Y' - sY = 0 \longleftarrow \text{جدایی پذیر}$$

Scanned by CamScanner

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-s\,ds}{s^2+1} \longrightarrow \ln y = -\frac{1}{2}\ln(s^2+1) + \ln c$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{s^2\left(1+\frac{1}{s^2}\right)}} = \frac{c}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{c}{s}\left[1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{s^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$L^{-1}(y) = L^{-1}\left[\frac{c}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2s^3} + \cdots\right)\right]$$

$$y = c\left(1 - \frac{1}{4}t^2 + ?\,t^6 + ?\,t^8 \cdots\right)$$

$$L\left[J_0(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$t = 0 \Rightarrow y = 1 = c \rightarrow y = J_0(t)$$

اشتباهات متداول

$$L\left[t y''\right] \neq t\,L\left[y''\right]$$

فقط ضریب ثابت را می‌توان بیرون آورد.

معادلات با ضرایب متغیر حداکثر درجه یک هستند. (و با مشتق تبدیل لاپلاس حل می‌شوند)

Scanned by CamScanner

انتگرال تبدیل لاپلاس: فرض کنید $F(t)$ در شرایط وجود تبدیل لاپلاس صدق کند و

$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{t}$ موجود باشد و $L[F(t)] = F(s)$ ، آنگاه داریم: $L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)\,du$

اثبات:

به فرض $G(s) = L\left[\frac{F(t)}{t}\right]$

$$G'(s) = \frac{dG(s)}{ds} = \underbrace{L\left[-t \cdot \frac{F(t)}{t}\right]}_{-L[F(t)]} = -F(s)$$

$$G(s) = -\int_a^s F(u)\,du = \int_s^a F(u)\,du$$

می‌دانیم وقتی s به سمت بی‌نهایت میل می‌کند $G(s)$ به سمت صفر میل خواهد کرد پس باید a را

بی‌نهایت اختیار کنیم

$$L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)\,du$$

تعریف: $\int_0^\infty e^{-st} \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_s^\infty F(u)\,du \xrightarrow{s \to 0} \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(u)\,du$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$

حل: $\longrightarrow \int_0^\infty L[\sin t]\,ds = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds = \lim_{h \to \infty} \tan^{-1}(s)\Big]_0^h = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^\infty e^{-3t} \cos t\,dt = L[\cos t]_{s=3} = \left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \frac{3}{10}$$

PAPCO
Scanned by CamScanner

$$L\left[\frac{\sinh t}{t}\right] = \int_s^{\infty} L[\sinh t]\, du = \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2-1}\, du$$

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right]$$

← درچنین مسائلی : که مشتق مخرج در صورت وجود دارد می‌توانیم
از روش زیر استفاده کنیم :

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u)\, du$$

از طرفین L^{-1} می‌گیریم $\rightarrow L^{-1}L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = L^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(u)\, du\right]$

$$\rightarrow f(t) = t\, L^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(u)\, du\right]$$

تقسیم

$$\rightarrow t L^{-1}\left[\int_s^{\infty} \frac{u+1}{u^2+2u+2}\, du\right] = t\, L^{-1}\left[\frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2)\Big|_s^{\infty}\right]$$

← اگر ∞ را در ln جایگذاری کنیم جوابی به دست نمی‌آوریم پس در این مثال جایز نیست که از این روش استفاده
کنیم و باید از روش قبلی یعنی تجزیه کامل کسرها استفاده کنیم.

← مثال :

$$L\Big[\underbrace{t\int_0^t e^{-u}\frac{\sin u}{u}\, du}_{f(t)}\Big] = F(s)$$

$$F(s) = L\Big[t\underbrace{\int_0^t e^{-u}\frac{\sin u}{u}\, du}_{f_1(t)}\Big] = -F_1'(s)$$

$$F_1(s) = L\Big[\int_0^t \underbrace{e^{-u}\frac{\sin u}{u}}_{f_2(t)}\, du\Big] = \frac{1}{s}F_2(s)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$F_2(s) = L\left[e^{-t}\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{f_3(t)}\right] = F_3(s+1)$$

$$F_3(s) = L\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^{\infty} L[\sin t]\,du = \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$\longrightarrow F_3(s) = \tan^{-1}u \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \text{ یا } \cot^{-1}(s)$$

$$F_2(s) = F_3(s+1) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s}F_2(s) = \frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$F(s) = -F_1'(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right)$$

$L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right] \longrightarrow$ نمی‌توانیم حل کنیم (با روش‌های قبل) طبق توضیح داده شده.

$L^{-1}[F(s).G(s)]$ مطلوب است محاسبه‌ی $L[g(t)] = G(s)$ و $L[f(t)] = F(s)$ باشد ← اگر

حل: $F(s).G(s) = L[f(t)]L[g(t)] = \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-sy} g(y)\,dy\right)$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(x+y)} f(x)g(y)\,dx\,dy$$

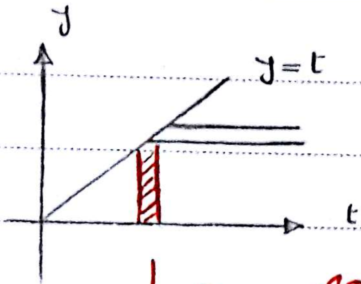
با فرض: $\begin{cases} x+y=t \rightarrow x = t-y \;\rightarrow dx = dt \\ y=y \rightarrow \text{تغییری نکرده است} \end{cases}$ ← بنابراین ناحیه‌ی انتگرال ربع اول می‌باشد

$$F(s).G(s) = \int_0^{\infty}\int_y^{\infty}\left(e^{-st} f(t-y)\,dt\right) g(y)\,dy$$

نتیجه ←

PAPCO

Scanned by CamScanner



حالا این انتگرال را می خواهیم ←   لاپلاس

$$\int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t-y)\, g(y)\, dy \right) dt$$ ← تغییر متغیر می دهیم

$$L^{-1}\, F(s) \cdot G(s) = L^{-1} L \left[\int_0^t f(t-y)\, g(y)\, dy \right]$$ (نتیجه)

$$L^{-1}\left[F(s) \cdot G(s) \right] = \int_0^t f(t-y)\, g(y)\, dy$$ (نتیجه)

کانولوشن دو تابع f و g را با نماد $f * g$ ← نمایش می دهیم.

خواص کانولوشن:

① $f * g = g * f$ (خاصیت جابجایی)

② $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (توزیع پذیری)

③ $f * (g_1 * g_2) = (f * g_1) * g_2$ (شرکت پذیری)

④ $1 * f = f * 1 \neq f$

اثبات خاصیت 4: $f(t) = e^t \,,\, g(t) = 1$

$$1 * f = \int_0^t e^{(t-y)} (1)\, dy = e^t \int_0^t e^{-y}\, dy = e^t \left[-e^{-y} \right]_0^t$$

Scanned by CamScanner

$$e^{t}(-e^{-t}+1)=e^{t}-1$$

مثال: $F(s)=\frac{1}{s+1}$, $G(s)=\tan^{-1}\frac{1}{s}$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right]$$

$$f(t)=L^{-1}\Big[\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{F(s)}\Big]=e^{-t}$$

$$g(t)=L^{-1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right]=\frac{-1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right)\right]=\frac{\sin t}{t}$$

$$=\int_0^t e^{-(t-y)}\frac{\sin y}{y}\,dy=e^{-t}\int_0^t e^{y}\frac{\sin y}{y}\,dy$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=L^{-1}\Big[\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{F(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{G(s)}\Big]$$

← به جمع تفاضل از روش تجزیه کسرها حل نمی‌شود.

$$\int_0^t \sin(t-y)\sin y\,dy$$ ← ضرب دوتا sin که میشه جمع دوتا cos

تعریف: معادله‌ای که تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد به آن معادلات انتگرالی گوییم. مانند:

$$y(t)=f(t)+\int_0^{t} g(t-x)\,y(x)\,dx$$

که در آن $f(t)$ و $g(t)$ توابع معلوم و $y(t)$ تابع مجهول است.

$$L[y(t)]=L[f(t)]+L\Big[\underbrace{\int_0^t g(t-x)\,y(x)\,dx}\Big]$$

$$L[g(t)]\,L[y(t)]$$

$\rightarrow F(s)\cdot G(s)$

Scanned by CamScanner

مثال : معادله‌ی انتگرالی زیر را حل کنید .

$$y(t) = t + \int_0^t \sin(t-x)\, y(x)\, dx$$

$$L[y(t)] = L[t] + L\left[\int_0^t \sin(t-x) y(x)\, dx\right]$$

$$L[y(t)] = \frac{1}{s^2} + \underbrace{L[\sin t]}_{\frac{1}{s^2+1}} \cdot L[y(t)]$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)}_{\frac{s^2}{s^2+1}} L[y(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$L^{-1} L[y(t)] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2+1}}\right] = L^{-1}\left[\frac{s^2+1}{s^4}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right]$$

$$y(t) = t + \frac{1}{3!} t^3$$

Scanned by CamScanner

Subject: جلسه 24 «بنام او» دوشنبه 95.9.21
Date

دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - z = \dfrac{t^2}{2} \\ y + \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \qquad y(0)=0,\; z(0)=1$$

وقتی در لحظه صفر داریم لاپلاس مناسب است.

$$\begin{cases} L[y'] - L[z] = L[\tfrac{t^2}{2}] \\ L[y] + L[z'] = L[0] \end{cases} \qquad L[y] = Y ,\; L[z] = Z$$

$$\begin{cases} sY - y(0) - Z = \dfrac{1}{s^3} \quad (y(0)=0) \\ Y + sZ - (z(0)) = 0 \quad (z(0)=1) \end{cases} \qquad \times s \begin{cases} sY - Z = \dfrac{1}{s^3} \\ Y + sZ = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (s^2+1)Y = \frac{1}{s^2} + 1 = \frac{s^2+1}{s^2} \longrightarrow Y = \frac{1}{s^2}$$

$$L^{-1}[Y] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = y \longrightarrow y = t$$

$$z = y' - \frac{t^2}{2} = 1 - \frac{t^2}{2}$$

مثال :

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 2$$

$$\begin{cases} L[x'] = 6\overbrace{L[x]}^{X} - 3\overbrace{L[y]}^{Y} \\ L[y'] = 2L[x] - L[y] \end{cases} \qquad \begin{cases} sX - 6X + 3Y = +2 \\ sY + Y - 2X = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-6)X + 3Y = 2 \\ (s+1)Y - 2X = 2 \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

«به نام خدا»

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-6 & 3 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{2s-4}{\underbrace{(s-6)(s+1)+6}_{s^2-5s}}$$

* همیشه درجه‌ی صورت باید کمتر از درجه‌ی مخرج باشد (مساوی هم نه) ← 1

$$X = \frac{2s-4}{\underbrace{s(s-5)}_{s^2-5s}} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-5} \qquad \begin{cases} A+B=2 \\ -5A=-4 \end{cases} \qquad A=\frac{4}{5}, \quad B=\frac{6}{5}$$

$$L^{-1}[X] = x = L^{-1}\left[\frac{\frac{4}{5}}{s} + \frac{\frac{6}{5}}{s-5}\right]$$

$$\to x = \frac{4}{5} + \frac{6}{5}e^{5t}$$

سیستم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + F_1(t) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + F_2(t) \end{cases}$$

که در آن a_1 و a_2 و b_1 و b_2 اعداد ثابتی هستند.

← اگر F_1 و F_2 هر دو صفر باشند، دستگاه را همگن می‌نامیم و در غیر این صورت دستگاه را ناهمگن

نکته: * F_1, F_2 متغیر مستقل یعنی t را شامل می‌شوند (چون x و y متغیر مستقل نیستند).

مثال:

$$\begin{cases} x' = 6x-3y \\ y' = 2x-y \end{cases}$$

حل: $y' = 2x-y \to x = \frac{1}{2}(y'+y) \to x' = \frac{1}{2}(y''+y')$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

$x' = \frac{1}{2}(y''+y') = 6x - 3y = 6(\frac{1}{2})(y'+y) - 3y$ (6 → 3)

$\rightarrow \frac{1}{2}(y''+y') = 3y' + 3y - 3y \rightarrow y''+y' = 6y' \rightarrow y'' - 5y' = 0$

← معادله درجه 2 با ضرایب ثابت .

//

معادله کمکی $\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 5 \rightarrow y = c_1 + c_2 e^{5t}$

$x = \frac{1}{2}(y'+y) = \frac{1}{2}(5c_2 e^{5t} + c_1 + c_2 e^{5t}) = \frac{c_1}{2} + 3c_2 e^{5t}$

← دستگاه اپراتوری :

$F_{11}(D)x_1 + F_{12}(D)x_2 + \cdots + F_{1n}(D)x_n = g_1(t)$

$F_{21}(D)x_1 + F_{22}(D)x_2 + \cdots + F_{2n}(D)x_n = g_2(t)$

$\vdots$

$F_{n1}(D)x_1 + F_{n2}(D)x_2 + \cdots + F_{nn}(D)x_n = g_n(t)$

← اگر تمامی $g_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ صفر باشد ، دستگاه فوق را همگن و در غیر این صورت غیرهمگن

گوییم . (روش حذف برای حل این دستگاه اپراتوری)

← تعداد ثابت های دستگاه اپراتوری با : بالاترین مرتبه ی دیفرانسیل برابر .

مثال: (مثال صفحه قبل)

$$\begin{cases} (D-6)x+3y=0 \\ -2x+(D+1)y=0 \end{cases}$$

$F(D)y=g(x)$

$y_p = \dfrac{1}{F(D)}\, g(x)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & D+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-6 & 3 \\ -2 & D+1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{(D-6)(D+1)+6}$$

D^2-5D ← تعداد ثابت ها 2 است.

$x=0$ یک جواب نیست.

$(D^2-5D)x=0 \rightarrow x = c_1 + c_2 e^{5t}$

معادله مشخصه ← $\lambda^2 - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 5$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & D-6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{D^2-5D} = \frac{0}{D^2-5D}$$

$\rightarrow (D^2-5D)y=0 \rightarrow y = A_1 + A_2 e^{5t}$

* تعداد ثابت‌ها 4 تا شد، در حالی که باید 2 تا باشد. بالفرض آنها را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} (D-6)(c_1+c_2e^{5t}) + 3(A_1+A_2e^{5t}) = 0 \\ -2(c_1+c_2e^{5t}) + (D+1)(A_1+A_2e^{5t}) = 0 \end{cases}$$

$$5c_2e^{5t} - 6c_1 - 6c_2e^{5t} + 3A_1 + 3A_2e^{5t} = 0$$

$$\rightarrow (-c_2+3A_2)e^{5t} + (-6c_1+3A_1) = 0$$

$$\begin{cases} -c_2+3A_2=0 \rightarrow c_2 = 3A_2 \\ -6c_1+3A_1=0 \rightarrow c_1 = \frac{1}{2}A_1 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Date

← همیشه در معادله کلی اپراتوری از تعداد کل که می‌دانیم بیشتر می‌شود و ما باید با الصاق بین آن‌ها را بیابیم تا به تعداد ثابت‌های اولیه برسیم.

مثال:

$$\begin{cases} (D^2-1)y - 2z = x \\ -3y + (D^2-2)z = 0 \end{cases} \qquad D = \frac{d}{dx}$$

y و z برحسب x اند.

است دستگاه ناهمگن

$$y = \frac{\begin{vmatrix} x & -2 \\ 0 & D^2-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^2-1 & -2 \\ -3 & D^2-2 \end{vmatrix}} = \frac{(D^2-2)x}{(D^4-3D^2+2)-6} = \frac{-2x}{D^4-3D^2-4}$$

تعداد ثابت‌ها 4 تا است.

$$(D^4-3D^2-4)y = -2xe^{0x} \qquad \alpha = 0$$

معادله کمکی: $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow (\lambda^2-4)(\lambda^2+1) = 0$

$\rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

← $\alpha = 0$ ریشه معادله کمکی نیست پس: $y_p = Ax + B$

$(D^4 - 3D^2 - 4)(Ax+B) = -2x \rightarrow \begin{cases} -4Ax - 4B = -2x \\ A = \frac{1}{2} \quad B = 0 \end{cases}$

$y_p = \frac{1}{2}x$

$y = y_h + y_p \qquad \begin{cases} z_h = y_h \\ z_p \neq y_p \end{cases}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + g_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + g_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + g_n(t)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

اگر A را یک ماتریس $n \times n$ به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

و X یک بردار ستونی به صورت زیر باشد:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

و $G(t)$ یک تابع برداری به صورت زیر باشد:

$$G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

آنگاه دستگاه (1) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dX}{dt} = X' = AX + G(t)$$

Scanned by CamScanner

ect

مثال : دستگاه زیر را به صورت ماتریسی بیان کنید .

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + t$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 6x_3 + e^t$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_2 - 7x_3$$

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner

Subject : ۹۵,۹,۲۹ جلسه ی 25

Year . Month . Date . ( )

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. بردار ستونی ناصفر v را بردار ویژه A گوییم هرگاه اسکالر r وجود داشته باشد که $Av = rv$ اسکالر r را مقدار ویژه گوییم.

$$Av = rv \Rightarrow (A - rI)v = 0$$

بنابراین v بردار ویژه A است اگر و تنها اگر v جواب ناصفر دستگاه $(A - rI)v = 0$

می دانیم این دستگاه جواب ناصفر دارد اگر و تنها اگر $\det(A - rI) = 0$

تضمین: بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه متمایز، مستقل خواهند بود.

مثال: مقدار ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

$$A - rI = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & 2 \\ 2 & 1-r \end{bmatrix}$$

$$\det(A - rI) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ 2 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-r)^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

به فرض $r = 3$:

$$A - r_1 I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A - r_1 I)v = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = v_2$$

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = v_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$r_2 = -1$:

$$(A - r_2 I)v = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = -v_2$$

Ariyan

$$v^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

از آنجایی که معادلات همگن مرتبه اول و دوم با ضرایب ثابت جواب‌هایی به صورت

تابع نمایی دارند پیشنهاد می‌کنند $X(t) = e^{rt} v$ جوابی برای دستگاه $X'(t) = AX$

باشد که در آن v بردار ثابت است.

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}v) = A(e^{rt}v)$$

$$re^{rt}v = e^{rt}Av \longrightarrow rv = Av \longrightarrow (A - rI)v = 0 \qquad e^{rt} \neq 0$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید که در آن $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

$$X' = AX$$

$$A - rI = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-r & 1 \\ -5 & 4-r \end{bmatrix}$$

$$\det(A - rI) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-r & 1 \\ -5 & 4-r \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2+r)(4-r) + 5 = 0 \longrightarrow r_1 = -1, \; r_2 = 3$$

به فرض $r_1 = -1$

$$(A + r_1 I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 \longrightarrow v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به فرض $r_2 = 3$

$$(A - r_2 I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_2 = 5v_1$$

$$v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$X_1 = e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = e^{3t}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$

$= c_1 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$

قضیه: اگر $X(t) = y(t) + i\,z(t)$ جواب مختلطی از دستگاه $X' = AX$ باشد آنگاه $y(t)$ و $z(t)$ جوابهای حقیقی $X' = AX$ هستند

مثال: دستگاه زیر را حل کنید

$X' = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 2\\-2 & 0\end{bmatrix}}_{A} X$

$\det(A - rI) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix}-r & 2\\-2 & -r\end{vmatrix} = 0 \longrightarrow r^2 + 4 = 0 \rightarrow r_1 = 2i \,,\, r_2 = -2i$

$(A - rI)\bar{v} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix}-2i & 2\\-2 & -2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\begin{cases}-2iv_1 + 2v_2 = 0\\-2v_1 - 2iv_2 = 0\end{cases} \Longrightarrow -2iv_1 + 2v_2 \longrightarrow v_2 = iv_1$

$v^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} \qquad X_1 = e^{2it}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} = (\cos 2t + i\sin 2t)\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

$= \underbrace{\begin{bmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\end{bmatrix}}_{y(t)} + i\underbrace{\begin{bmatrix}\sin 2t\\\cos 2t\end{bmatrix}}_{z(t)}$ ↙ 2,

$X(t) = c_1\begin{bmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}\sin 2t\\\cos 2t\end{bmatrix}$

Ariyan

Scanned by CamScanner

@JozveBartarOfficial

Scanned by CamScanner